Glava 1

Procentni račun bez formula

Šta je to 1% od neke vrednosti ili mernog broja neke količine?

U nekim knjigama piše definicija $1\% = 0,01 = \frac{1}{100}$, što se ne može reći da je pogrešno, ali onda nam je pojam procenta nepotreban i niko ga ne bi koristio. Međutim kako se termin i pojam procenta masovno koristi, kako u ubičnom životu, tako i u finasijkim poslovanjima svih institucija to je ipak pogodnija definicija:

Definicija 1.1 $\boxed{1\% \ od\ A\ je\ 0,01 \cdot A = \frac{1\%}{100\%} \cdot A = \frac{A}{100}}$

Posledica 1.2 $\boxed{\text{„}p\text{"}\ procenata\ od\ A\ je\ \frac{p}{100\%} \cdot A.}$

Prema tome 1% treba smatrati nedefinisanim, a definisano je $\boxed{1\% \text{ od A}}$.

Napomena: U imeniocu prthodnog razlomka $\frac{p}{100\%}$ mora da stoji znak $\%$ jer kad se uvrsti p i u broiocu će biti znak $\%$, pa će na kraju $\frac{p}{100\%}$ biti običan (neimenovani broj), što je naravno neophodno.

Uokvirene činjenice koje slede, NISU FORMULE i nikako se ne smeju učiti napamet, već uvek logički izvoditi u trenutku računanja!

One su rezultat algoritma odnosno postupka koga treba pamtiti!

Zadatak 1.3 *Ako je nešto poskupilo za* $p = 17\%$ *tada nova cena* N *se dobija kada se stara cena* S *pomnoži sa* $1,17$ *tj.* $\boxed{N = S \cdot 1,17.}$

Rešenje: Nova cena N se dobija kada se na staru cenu S doda povećanje $\frac{7\%}{100\%} \cdot S = \frac{17}{100} \cdot S$, (vidi 1.2), jer $\frac{S}{100}$ je jedan procenat od S, a $\frac{S}{100} \cdot 17$ je 17 procenata od S pa je

$$N = S + \frac{S}{100} \cdot 17 = S \cdot (1 + \frac{17}{100}) = S \cdot 1,17$$

Kako je $N = S \cdot (1 + \frac{17}{100})$, a to se može zapisati i kao
$N = S \cdot (1 + \frac{17\%}{100\%})$,
to sledi da se uopšteno može napisati $\boxed{N = S \cdot (1 + \frac{p}{100\%})}$ gde je p izraženo u procentima, kao što je u ovom primeru $p = 17\%$.

Broj $1 + \frac{p}{100\%}$ obeležava se sa r, pa je $r = 1 + \frac{p}{100\%}$,
$p = (r - 1) \cdot 100\%$ i $\boxed{N = S \cdot r}$.

Zadatak 1.4 *Ako je nešto pojeftinilo za* $p = 17\%$ *tada nova cena* N *se dobija kada se stara cena* S *pomnoži sa* $0,83$ *tj.* $\boxed{N = S \cdot 0,83.}$

Rešenje: Nova cena N se dobija kada se od stare cene S oduzme smanjenje $\frac{7\%}{100\%} \cdot S = \frac{7}{100} \cdot S$, (vidi 1.2), jer $\frac{S}{100}$ je jedan procenat od S, a $\frac{S}{100} \cdot 17$ je 17 procenata od S pa je

$$N = S - \frac{S}{100} \cdot 17 = S \cdot (1 - \frac{17}{100}) = S \cdot 0,83$$

Kako je $N = S \cdot (1 - \frac{17}{100})$, a to se može zapisati i kao
$N = S \cdot (1 - \frac{17\%}{100\%})$,
to sledi da se uopšteno može napisati $\boxed{N = S \cdot (1 - \frac{p}{100\%})}$ gde je p izraženo u procentima, kao što je u ovom primeru $p = 17\%$.

Broj $1 - \frac{p}{100\%}$ obeležava se sa r, pa je $r = 1 - \frac{p}{100\%}$,
$p = (1 - r) \cdot 100\%$ i $\boxed{N = S \cdot r}$.

Ako se cena robe promenila za p procenata, tada je promena cene u slučaju poskupljenja $\boxed{N - S = S \cdot \frac{p}{100\%}}$ (vidi posledicu 1.2)

ili u slučaju pojeftinjenja $\boxed{S - N = S \cdot \frac{p}{100\%}}$, (vidi posledicu 1.2) gde je N nova cena i S stara cena.

U nekim udžbenicima se umesto formule $N = S \cdot (1 + \frac{p}{100\%})$ piše formula $N = S \cdot (1 + p)$, pa kada u tekstu zadatka piše $p = 17\%$ oni u formulu $N = S \cdot (1 + p)$ umesto p uvršćavaju p=0,17. Naravno da se dobija isti rezultat, ali kao što rekosmo tada bi time faktički izbacili pojam i termin procenta kao jedinice mere, što je u suprotnosti sa praksom u običnom životu i svim institucijama.

Naravno da je i nedosledno, pre svega metodički a i stručno, da ako u zadtku piše $p = 17\%$ da se onda zamenjuje $p = 0,17$ umesto onoga što piše!

Prednost zapisa $N = S \cdot (1 + p)$ u odnosu na $N = S \cdot (1 + \frac{p}{100\%})$ je samo što je kraći za onih 100% u imeniocu, ali je mnogo veća šteta sa metodičkog i stručnog aspekta. Zbog toga ostajemo pri $S \cdot (1 + \frac{p}{100\%})$.

U svim primerima do sada veličina S je bila GLAVNICA, odnosno veličina koju smo smatrali za 100%

Zadatak 1.5 *Ako u nekoj mešavini ima a kiligrama materje A i b kilograma materje B, tada procenat p_A materje A u mešavini iznosi* $\boxed{p_A = \frac{a}{a+b} \cdot 100\%}$, *a procenat p_B materije B u mešavini je* $\boxed{p_B = \frac{b}{a+b} \cdot 100\%}$.

Rešenje: Ovo takođe nisu formule, već posledice od 1.2, jer na osnovu nje je $\cdot \frac{p_A}{100\%}(a+b) = a$ i $\cdot \frac{p_B}{100\%}(a+b) = b$, odakle sledi tvrđenje zadatka.

Zadatak 1.6 *Ako je cena robe* 100 *dinara i ako je ona poskupila za* 40% *a zatim pojeftinila za* 30% *kolika je nova cena?*

Rešenje: $100 \cdot 1,40 \cdot 0,70 = 100 \cdot 0,98 = 98$ dinara.

Zadatak 1.7 *Masa nekoga tela se povećala sa 80kg na 100kg. Za koliko procenata p se povećala masa toga tela?*

Rešenje: $p = \frac{100-80}{80} \cdot 100\% = 25\%$.

Zadatak 1.8 *Masa nekoga tela se smanjila sa 100kg na 80kg. Za koliko procenata p se smanjila masa toga tela?*

Rešenje: $p = \frac{100-80}{100} \cdot 100\% = 20\%$.

Činjenica 1.9

Ako se od dve veličine koje se upoređuju (naprimer traži njihova razlika u procentima) veća uzme za glavnicu tj. za 100%, tada se obračuni zovu račun „niže sto”

Činjenica 1.10

Ako se od dve veličine koje se upoređuju (naprimer traži njihova razlika u procentima) manja uzme za glavnicu tj. za 100%, tada se obračuni zovu račun „više sto”

Putpuno je nebitno kako se koji račun zove, bitno je da je u svakom problemu jasno rečeno koju veličinu uzimamo za glavnicu tj. za 100%.

Zadatak 1.11 *Nabavna cena je* $N = 80$ *dinara, a prodajna cena je* $P = 100$ *dinara. Kolika je razlika u procentima* p *između te dve sume novca?*

Rešenje: $p = 25\%$ ili $p = 20\%$, zavisno od toga koju sumu uzimamo za 100%, tj. za glavnicu, odnosno prodajna cena je za 25% veća od nabavne (račun „više sto”), dok je nabavna cena manja za 20% od prodajne (račun „niže sto”.)

Jezikom ekonomista se to kaže rabat je 20% a marža je 25%

Marža M i **rabat** R, u dinarima su jednake vrednosti, a u procentima različite. Zašto?

Razlika između prodajne cene P i nabavne cene N u dinarima jednaka je i marži M i rabatu R odnosno M=R. Međutim u procentima razlike nisu iste, jer ako P uzmemo za glavnicu (tj. za 100%), tada razlika R=P-N zove se rabat i u procentima je $p_R = \frac{\mathsf{P}-\mathsf{N}}{\mathsf{P}} \cdot 100\%$, a ako N uzmemo za glavnicu (tj. za 100%), tada razlika M=P-N zove se marža i u procentima je $p_M = \frac{\mathsf{P}-\mathsf{N}}{\mathsf{N}} \cdot 100\%$ pa sledi da je $p_M = \frac{100\%}{100\%-p_R} p_R$.

Zadatak 1.12 *Aca ima* a *dinara, a Dejan ima* $b \geq a$ *dinara. Kolika je razlika u procentima* p *između te dve sume novca?*

Rešenje: $p = \frac{b-a}{b} \cdot 100\%$ ako sumu b uzimamo za 100% tj. za glavnicu ili $p = \frac{b-a}{a} \cdot 100\%$, ako sumu a uzimamo za za 100% tj. za glavnicu.

Zadatak 1.13 *Ako se neka suma* S *povećala za* 25% *za koliko procenata* p *treba smanjiti novu sumu da bi se vratili na istu sumu* S*?*

Rešenje: $S \cdot 1,25 \cdot r = S$ odakle sledi $r = \frac{1}{1,25} = 0,8 = 0,80$, pa je $p = 20\%$ (ili ko hoće može da računa: $p = (1 - r) \cdot 100\% = 20\%$)

Zadatak 1.14 *Ako se neka suma S smanjila za 20% za koliko procenata p treba povećati novu sumu da bi se vratili na istu sumu S?*

Rešenje: $S \cdot 0,80 \cdot r = S$ odakle je $r = \frac{1}{0,80} = 1,25$, pa je $p = 25\%$
(ili ko hoće može da računa: $p = (r-1) \cdot 100\% = 25\%$

Zadatak 1.15 *Neka roba je poskupela za 11%, zatim pojeftinila za 9% i nakon toga poskupela za 9% Kolika je ukupna promena cene u procentima ?*

Rešenje: $S \cdot 1,11 \cdot 0,91 \cdot 1,09 = N \Leftrightarrow N = 1,101009 \cdot S \Rightarrow r = 1,101009$ što znači da je ukupna promena cene $10,1009\%$

Zadatak 1.16 *Sveže smokve sadrže $p_1 = 72\%$ vode, a suve $p_2 = 20\%$ vode. Koliko se kilograma „m" suvih smokava može dobiti sušenjem $M = 100$ kilograma svežih smokava ? Koliko procenata „p" gube na težini smokve prilikom sušenja ?*

Rešenje: Izjednačavanjem „nevodenog" dela materje u svežim i suvim smokvama dobija se

$$m \cdot 0,80 = 0,28 \cdot 100$$

pa je $m = \frac{0,28 \cdot 100}{0,8} = 35\,kg$ i $p = \frac{M-m}{M} \cdot 100\% = \frac{100-35}{100} \cdot 100\% = 65\%$.

Zadatak 1.17 *U posudi A nalzi se 9 litara sode, a u posudi B nalazi se 9 litara vina. Iz posude A uzme se 1 litar sode, sipa u posudu B i dobro promeša sa onih 9 litara vina. Zatim se iz posude B uzme 1 litar te mešavine i sipa u posudu A. Da li je procenat p_1 sode u posudi B veći, manji ili jednak u odnosu na procenat p_2 vina u posudi A?*

Zašto je ovaj zadatak interesantan? Interesantan je što se može rešiti na dva načina. Jedan način je efektivnim računajem odgovarajućih procenata, a drugi je logički bez ikakvog računaja!

Zadatak 1.18 *U posudi A nalzi se n litara sode, a u posudi B nalazi se n litara vina. Iz posude A uzme se 1 litar sode, sipa u posudu B i dobro promeša sa onih n litara vina. Zatim se iz posude B uzme 1 litar te mešavine i sipa u posudu A. Koliki je procenat p_1 sode u posudi B, a koliki je procenat p_2 vina u posudi A?*

Zadatak 1.19 *Neki konjak ima 40% alkohola, a viski 45% alkohola. Ako se pomeša 2l konjaka sa 3l viskija, koliki će biti procenat alkohola u mešavini konjaka i viskija ?*

Rešenje: $\frac{2 \cdot 40\% + 3 \cdot 45\%}{2+3} = 43\%$

Zadaci 1.19, 1.20, 1.21, 1.22 i 1.24 su suštinski isti, samo u malo drukčijoj interpretaciji!

Zadatak 1.20 *Neki konjak ima p_1 procenata alkohola, a neki viski ima p_2 procenata alkohola. Ako se pomeša c litara konjaka sa w litara viskija, koliki će biti procenat p alkohola u mešavini $M = c + w$ konjaka i viskija?*

Rešenje:

$$M = \frac{c}{c+w}M + \frac{w}{c+w}M =$$

$$(\frac{p_1}{100} + 1 - \frac{p_1}{100})\frac{c}{c+w}M + (\frac{p_2}{100} + 1 - \frac{p_2}{100})\frac{w}{c+w}M =$$

$$\underbrace{\frac{p_1}{100}\frac{c}{c+w}M + \frac{p_2}{100}\frac{w}{c+w}M}_{alkohol} + \underbrace{(1-\frac{p_1}{100})\frac{c}{c+w}M + (1-\frac{p_2}{100})\frac{w}{c+w}M}_{nealkoholni\ ostatak}$$

$$= \frac{cp_1 + wp_2}{c+w}\frac{M}{100} + \frac{c(100-p_1) + w(100-p_2)}{c+w}\frac{M}{100} =$$

$$= p\frac{M}{100} + (100-p)\frac{M}{100} = M,$$

što znači da je $\boxed{p = \frac{cp_1+wp_2}{c+w}}$

Zadatak 1.21 *Neki konjak ima p_1 procenata alkohola, a neki viski ima p_2 procenata alkohola. Koliki je procenat p alkohola u mešavini konjaka i viskija ako je odnos količine viskija i konjaka jednak q?*

Rešenje: Ako u prethodnom rešenju $p = \frac{cp_1+wp_2}{c+w}$ izvršimo skraćivanje razlomka sa c i zatim uvedemo smenu $\frac{w}{c} = q$ dobija se $p = \frac{p_1 + \frac{w}{c}p_2}{1+\frac{w}{c}}$ tj. $\boxed{p = \frac{p_1+qp_2}{1+q}}$.

Zadatak 1.22 *Neki konjak ima $p_1 = 40\%$ procenata alkohola, a neki viski ima $p_2 = 45\%$ procenata alkohola. Koliki je procenat p alkohola u mešavini konjaka i viskija ako je $p_3 = 60\%$ procenat konjaka u toj mešavini?*

Rešenje: Ako u prethodnom rešenju $p = \frac{cp_1+wp_2}{c+w} = \frac{p_1+\frac{w}{c}p_2}{\frac{c+w}{c}}$ uvrstimo (Vidi 5) $\frac{c}{c+w} \cdot 100\% = p_3$ tj. $\frac{c+w}{c} = \frac{100\%}{p_3}$ ili $\frac{w}{c} = \frac{100\%}{p_3} - 1$ dobija se $p = \frac{p_1+(\frac{100\%}{p_3}-1)p_2}{\frac{100\%}{p_3}}$ tj. $p = \frac{p_1p_3+(100\%-p_3)p_2}{100}$ odnosno $\boxed{p = \frac{p_3}{100\%}(p_1 - p_2) + p_2.}$
Konkretno $p = \frac{p_3}{100\%}(p_1 - p_2) + p_2 = \frac{60\%}{100\%}(40\% - 45\%) + 45\% = 0,6 \cdot (-5\%) + 45\% = -3\% + 45\% = 42\%$.

Zadatak 1.23 *Neka fabrika proizvodi samo proizvode A i proizvode B. Procenat profita u proizvodnji proizvoda A je $p_1 = 57\%$, a u proizvodnji proizvoda B je $p_2 = 37\%$. Ako je $p_3 = 55\%$ procenat prihoda od proizvodnje proizvoda A u odnosu na ukupni prihod fabrike, koliki je procenat p profita u ukupnoj proizvodnji fabrike ?* R: $p = 48\%$

Zadatak 1.24 *Neka u rakiji ima 48% alkohola, u viskiju 46% alkohola, a u konjaku 40% alkohola. Ako se pomešaju 1dl rakije, 2dl viskija i 7dl konjaka, koliki će biti procenat alkohola u dobijenoj smeši ?*

Rešenje: $p = \frac{k_1p_1+k_2p_2+k_3p_3}{k_1+k_2+k_3} = \frac{1\cdot48\%+2\cdot46\%+7\cdot40\%}{1+2+7} = 42\%$. Vidi 1.20.

Zadatak 1.25 *Sveže smokve sadrže p_1 procenata vode, a suve p_2 procenata vode. Koliko procenata p gube na težini smokve prilikom sušenja?*

Rešenje: Ako je m broj kilograma suvih smokava, a M broj kilograma svežih smokava, tada izjednačavanjem „nevodenog" dela materje u svežim i suvim smokvama sledi $m \cdot \frac{100\%-p_2}{100\%} = M \cdot \frac{100\%-p_1}{100\%}$ i odatle je $\frac{m}{M} = \frac{100\%-p_1}{100\%-p_2}$, pa je
$p = \frac{M-m}{M} \cdot 100\% = (1 - \frac{100\%-p_1}{100\%-p_2}) \cdot 100\% = \frac{p_1-p_2}{100\%-p_2} \cdot 100\%$.

Zadatak 1.26 *Površina kvadrata se pvećala za 21%. Za kliko procenata se povećala stranica?*

Zadatak 1.27 *Površina kocke se pvećala za 21%. Za kliko procenata se povećala ivica?*

Zadatak 1.28 *Zapremina kocke se pvećala za 33,1%. Za kliko procenata se povećala ivica?*

RAČUN DIREKTNE PROPORCIONALNOSTI I OBRNUTE (INDIREKTNE) PROPORCIONALNOSTI

Zadatak 1.29 *Od* 55*kg brašna dobije se* 88*kg hleba. Koliko treba kilograma brašna da bi se dobilo* 104*kg hleba* ?

Rešenje Jasno je da su količina brašna i količina hleba direktno proporcionalne, jer ako ima više brašna biće i više hleba. Kako imamo da

$$\left\downarrow\begin{array}{l} \text{55kg brašna daje } \ \text{88kg hleba} \\ x\text{ kg brašna daje 104kg hleba}\end{array}\right\downarrow \qquad \text{to sledi:}$$

$$55 : x = 88 : 104 \Leftrightarrow 55 \cdot 104 = 88 \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{55 \cdot 104}{88} = 65\text{kg brašna.}$$

U ovom primeru imamo da od x kilograma brašna se dobija $y = f(x)$ kilograma hleba pri čemu je $\boxed{f(x) = \frac{8}{5} \cdot x}$ tj. $x = \frac{5}{8} \cdot f(x)$. Prema tome veličine x i $f(x)$ su direktno proporcionalne jer je $\boxed{f(x) = k \cdot x}$, gde je $k = \frac{8}{5}$ koeficijenat te proporcionalnosti (ili $x = \frac{1}{k} \cdot f(x)$ pa je onda koeficijenat proporcionalnosti $\frac{1}{k}$). Znači funkcija f određuje koliko će se dobiti kilograma hleba od date količine brašna u kilogramima.

Zadatak 1.30 *Neki bazen,* 6 *slavina napuni za* 8 *dana. Za koliko dana će isti bazen napuniti* 12 *slavina ako sve slavine pune bazen istim brzinama* ?

Rešenje U ovom primeru su broj slavina x i broj dana $f(x)$ obrnuto proporcionalne veličine jer za veći broj slavina trebaće manji broj dana da se napuni isti bazen. Kako

$$\left\downarrow\begin{array}{l} \text{6 slavina napuni bazen za 8 dana} \\ \text{12 slavina napuni bazen za } x \text{ dana}\end{array}\right\uparrow \qquad \text{sledi}$$

$6 : 12 = x : 8 \Leftrightarrow 6 \cdot 8 = 12 \cdot x \Leftrightarrow x = 4$ (a ne $6 : 12 = 8 : x$ kako bi bilo kod direktne proporcionalnosti kao u prethodnom).

Prema tome ako

$$\left\downarrow\begin{array}{l} x_1 \text{ slavina napuni bazen za } f(x_1) \text{ dana} \\ x_2 \text{ slavina napuni bazen za} f(x_2) \text{ dana}\end{array}\right\uparrow \qquad \text{tada sledi}$$

$x_1 : x_2 = f(x_2) : f(x_1) \Leftrightarrow x_1 \cdot f(x_1) = x_2 \cdot f(x_2) = k = x \cdot f(x) = 48$, odnosno $\boxed{f(x) = \frac{k}{x}} = \frac{48}{x}$.

Činjenica 1.31

Neka su x i $f(x)$ odgovarajuće veličine u bilo direktnoj, bilo obrnutoj proporcionalnosti. Ako je $x \in \{x_1, x_2\}$, to zapisujemo:

$$\star : \begin{array}{ll} x_1 & f(x_1) \\ x_2 & f(x_2) \end{array}$$

U DIREKTNOJ proporcionalnosti iz $\star$ sledi $\boxed{x_1 : x_2 = f(x_1) : f(x_2)}$,

U OBRNUTOJ proporcionalnosti iz $\star$ sledi $\boxed{x_1 : x_2 = f(x_2) : f(x_1)}$.

RAZNI ZADACI

Zadatak 1.32 *Bata popije balon vina za* 3 *sata i isti balon vina Boban popije za* 7 *sati. Za koliko minuta će biti popijen taj balon vina ako Bata i Boban piju istovremeno i svako od njih uvek ima stalnu (konstantnu) brzinu pijenja?*

Rešenje: $\frac{x}{3} + \frac{x}{7} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{21}{10}h = 2h\, 6\, min = 126\, min$

Zadatak 1.33 *Sat pokazuje tačno 0h. Nakon x minuta će se prvi put poklopiti mala i velika kazaljka. Izračunati x.*

Rešenje: $x - \frac{x}{12} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{12}{11}h = 1h\ 5min\ 27\frac{3}{11}sec.$

Zadatak 1.34 *Koliko ima različitih položaja kazaljki na časovniku u kojima se one poklapaju?*

Rešenje: Pokapaju se tačno 11 puta u sledećim vremenima:
$0h,\ \frac{12}{11}h,\ \frac{24}{11}h,\ \frac{36}{11}h,\ \frac{48}{11}h,\ \frac{60}{11}h,\ \frac{72}{11}h,\ \frac{84}{11}h,\ \frac{96}{11}h,\ \frac{108}{11}h,\ \frac{120}{11}h.$

Zadatak 1.35 *Sat pokazuje 00h. Nakon x minuta ugao između male i velike kazaljke će prvi put biti $180°$. Izračunati x.*

Rešenje: $x - \frac{x}{12} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6}{11}h = 32,\overline{72}min = 32\frac{8}{11}min = 32min\ 43\frac{7}{11}sec.$

Glava 2

Finansijska matematika bez formula

Ako je mesečna kamatna stopa 1% kolika je godišnja? Prostim kamatnim računom bi bila 12% a složenim kamatnim računom bi bila $(1,01^{12}-1)\cdot 100\% = 12,68250301... \approx 12,68\%$. Zašto? Nakon mesec dana suma K vredće $K \cdot 1,01$, nakon dva meseca vredeće $K \cdot 1,01^2$, itd. nakon dvanaest meseci vredće $K \cdot 1,01^{12} = K \cdot 1,1268250301...$, a odvade očevidno sledi da je tada godišnji procenat kamate 12,68%.

Obratno, ako je godišnji procenat kamate 12%, koliki je mesečni?

Ako želimo da ukupna vrednost sume K nakon godinu dana bude ista, bilo da svakoga meseca računamao računamo ukupnu ukamaćenu vrednost, bilo da jednom godišnje računamo ukupnu ukamaćenu vrednost, mor biti

$$K \cdot r^{12} = K \cdot 1,12 \quad \Rightarrow \quad r^{12} = 1,12 \Rightarrow \quad r = \sqrt[12]{1,12} = 1,009488793...$$

što znači da ako je godišnja kamatna stopa 12% tada je mesečna kamatna stopa $0,9488793...\% \approx 0,95\%$ i zove se konforna kamatna stopa. Mnogo bi bilo logičnije da se zove stvarna mesečna kamatna stopa! Zašto?

Međutim, još uvek se koristi relativna kamatna stopa, a to znači da ako je godišnja kamatna stopa 12%, tada mesečna relativna kamatna stopa je

$$1\%,$$

što zaista nema nikakvog opravdanja i logike. Zašto?

Nekada dok nije bilo računara i džepnih kalkulatora, bilo je opravdano korišćenje prostog interesnog računa. Dans je to potpuno besmisleno, a i nepravedno prema štedišama, koristiti prost interesni račun.

Naprimer uz mesečnu kamatnu stopu od 1% štediša bi na uloženih K=100 000,00 dinara za godinu dana dobio ukamaćenu vrednost od $100\,000,00 \cdot 1,12 = 112\,000,00$ dinara prostim interesnim računom, a dok složenim interesnim računom bi dobio ukamaćenu vrednost od $100\,000,00 \cdot 1,01^{12} = 112\,682,50$ dinara.

Kako se za mesečnu kamatnu stopu od 1% sada pojavljuju dve vrednosti za procent godišnje kamatne stope, to se onih 12% zove **nominalna** godišnja kamatna stopa, a onih 12,68% se zove **efektivna** kamatna stopa.

Prema tome ako je godišnja kamatna stopa p=12%, tada ako za mesečnu ($m-$ti deo godine) kamatnu stopu uzmemo 1% $(=\frac{p}{m})$, dogovoreno je da se ona zove **relativna** mesečna kamatna stopa, a ako za mesečnu kamatnu stopu uzmemo

$$(\sqrt[12]{1,12} - 1) \cdot 100\% = 0,9488793...\% \approx 0,95\%$$

tj. $\left((\sqrt[m]{1+\frac{p}{100\%}} - 1) \cdot 100\% \right)$ dogovoreno je da se ona zove **koMforna** mesečna kamatna stopa, jer sada sa tom konfornom se dobija da je godišnja tačno 12% jer je

$$K \cdot (\sqrt[12]{1,12}\,)^{12} = K \cdot (1,009488793...)^{12} = K \cdot 1,2$$

Definicija 2.1 Komforna kamatna stopa p_k *za* $m-$*ti deo godine i godišnju kamatnu stopu* p *je takav procenat, da ako neku sumu* K *suksesivno povećavamo* m *puta godišnje za* p_k *procenata, dobićemo istu sumu kao kad samo jednom u godini povećamo* K *za* p *procenata. Drugim rečima* p_k *je definisano sa jednakošću* $K \cdot (1+\frac{p_k}{100\%})^m = K \cdot (1+\frac{p}{100\%})$.

Izraz $1+\frac{p_k}{100\%}$ se obeležava sa r i zove se komforni interesni činilac.

Definicija 2.2 Relativna kamatna stopa p_r *za* $m-$*ti deo godine i godišnju kamatnu stopu* p *je procenat* m *puta manji od procenta* p *tj.* $p_r = \frac{p}{m}$. *Primetimo da sada* **nije** $K \cdot (1+\frac{p_r}{100\%})^m = K \cdot (1+\frac{p}{100\%})$, *što je bio slučaj kod komforne stope.*

Izraz $1+\frac{p_r}{100\%}$ se obeležava sa r i zove se relativni interesni činilac.

Činjenica 2.3 *Ako je p godišnja kamatna stopa i kapitalisanje se vrši m puta godišnje, tada relativna kamatna stopa za $m-$ti deo godine je $p_r = \frac{p}{m}$, a konforna je $p_k = \left((\sqrt[m]{1+\frac{p}{100\%}} - 1) \cdot 100\% \right)$.*

Poslednji izraz za komfornu kamatnu stopu za m-ti deo godine, ne treba pamtiti kao formulu, već treba pamtiti princip, a to je da želimo da za godinu dana bude ista ukamaćena vrednost, bez obzira da li računali godišnjim kapitalisanjem ili m puta godišnje vršili kapitalisanje tj. $K \cdot (1+\frac{p_k}{100\%})^m = K \cdot (1+\frac{p}{100\%})$,
a odavde sledi p_k u zavisnosti od p tj. tvrdnja iz činjenice 2.3.

Godišnji procenat kamate ćemo obeležavati sa p i zvati ga još i godišnja kamatna stopa ili nominalna kamatna stopa. Jasno je onda da iznos od K dinara, posle godinu dana iznosiće (vredeće) $K\cdot(1+\frac{p}{100\%})$ ili $K \cdot r$, gde je $r = 1+\frac{p}{100\%}$. U ovom slučaju se kaže da je obračun bio godišnji tj. kapitalisanje godišnje, odnosno obračunski period je bio jedna godina. Broj r zvaćemo interesni činilac.

Ako je obračunski period manji od godinu dana, odnosno ako se m puta godišnje obračunava kamata, tada broj r iznosi (približno?) $r_m = 1+\frac{p}{100\%m}$ i suma od K dinara, posle m - tog dela godine tj. posle toga jednoga obračunskoga perioda, vredeće $K \cdot (1+\frac{p}{100\%m}) = K \cdot r_m$ gde je opet $r_m = 1+\frac{p}{100\%m}$ i kao što smo rekli to je račun sa reletivnom kamatnom stopom $\frac{p}{m}$. Kroz godinu dana ta suma od K dinara vredeće

Činjenica 2.4 $$K{\cdot}r^m = K\cdot(1+\frac{p}{100\%m})^m \quad \left(\overset{?}{\neq} K \cdot (1+\frac{p}{100\%}) \right)$$

dinara, a posle proizvoljnih k (k ne mora da bude ceo broj!) obračunskih perioda vredeće

Činjenica 2.5 $$K\cdot r_m^k = K\cdot(1+\frac{p}{100\%m})^k$$

gde je $r_m = 1+\frac{p}{100\%m}$, pri čemu ne zaboravljamo da je kapitalisanje, tj. obračunski period, m - ti deo godine tj. obračuni su m puta godišnje!

Ako se radi sa konformnom stopom, sve je isto, samo se umesto $r_m = 1+\frac{p}{100\%m}$ uzima $r_m = \sqrt[m]{1+\frac{p}{100\%}}$ i tada je

Činjenica 2.6 $K \cdot r_m^k = K \cdot \left(\sqrt[m]{1 + \frac{p}{100\%}} \right)^k.$

$$\text{Za } k = m \text{ sledi } \left(= K \cdot (1 + \tfrac{p}{100\%}) \right)$$

Ako u prethodnom izrazu uzmemo da je $m = 1$, tada je kapitalisanje godišnje i k predstavlja vreme izraženo u godinama tj. jedinica mernja vremena je u tom slučaju jedna godina i istaknimo da

$\boldsymbol{k}$ **ne mora biti ceo broj**.

Definicija 2.7

Jezikom finansijske matematike kaže se da je suma (vrednost) $\boldsymbol{K \cdot r^k}$ **ESKONTOVANA** vrednost sume $\boldsymbol{K}$ nakon $\boldsymbol{k}$ obračunskih perioda, dok je $\boldsymbol{\frac{K}{r^k}}$ **DISKONTOVANA** vrednost od $\boldsymbol{K}$ u prošlost za $\boldsymbol{k}$ obračunskih perioda. Ako je obračunski period jedna godina, tada je $\boldsymbol{k}$ broj godina, a ako je obračunski period jedan mesec, tada je $\boldsymbol{k}$ broj meseci itd.

Prema tome ako umesto k, vreme izraženo u broju obračunski perioda, uzmemo t, vreme u godinama i ako je p godišnja kamatna stopa, tada vrednost sume K nakon vremena t označićemo sa $K(t)$ i važi sledeća jednakost:

Činjenica 2.8 $\boxed{K(t) = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100\%}\right)^t}$

gde je t realan broj (ne mora biti ceo). Ako je t pozitivno, tada je $K(t)$ **eskontovana** vrednost sume K tj. koliko ona vredi nakon $t > 0$ godina, a ako je t negativno, tada je $K(t)$ **diskontovana** vrednost sume K tj. koliko je vredela pre $|t|$ godina.

Ako je vreme dato u mesecima M, tada uzimamo $t = \frac{M}{12}$, a ako je vreme dato u danima D, tada uzimamo $t = \frac{D}{365}$ i najopštije ako za jedinicu vremena (tj. obračunski period) uzmemo $m-$ti deo godine i ako k ovih $m-$tih delova godine je isto što i vreme t u godinama, tada je $t = \frac{k}{m}$, pa je.

$$\boxed{K(t) = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100\%}\right)^t = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100\%}\right)^{\frac{k}{m}} = K \cdot \left(\sqrt[m]{1 + \frac{p}{100\%}} \right)^k}$$

Prema tome, ovakvo računanje diskontovane (eskontovane) sume $K(t)$ je faktički računanje konfornom kamatnom stopom.

Istaknimo da je dovoljno uvek računati konfornom (stvarnom) kamatnom stopom, sa godišnjim kapitalisanjem i godišnjom kamatnom stopom tj. po postupku $K(t) = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100\%}\right)^t$, jer su razlike veoma male ako bi se računalo sa relativnom kamatnom stopom i drukčijim kapitalisanjima. Takođe ne postoji niti jedan valjani razlog za korišćenje relativne kamatne stope, zbog činjenice da je svako nekada dužnik, a nekada poverioc.

Međutim, kako se u praksi još uvek koriste i relativna i konforna kamatna stopa, kao i razni obračunski periodi tj. kapitalisanja, to ćemo analizirati algoritme finasijskih obračuna sa raznim kapitalisanjima, relativnom i konfornom kamatnom stopom.

Kontiunalno (neprekidno) kapitalisanje

To je takvo kapitalisanje kod kog broj obračuna u godini m teži beskonačnosti, odnosno vremenski iterval jedog obračunskog perioda teži nuli i (naravno!) koristi se relativna kamatna stopa.

Ako je obračunski period m-ti deo godine i ako t označava broj godina, tada za ukupan broj obračunskih perioda k važi $k = mt$.

Ako to primenimo na obračun relativnom kamatnom stopom, dobija se:

$$\lim_{m\to\infty} K \cdot \left(1 + \frac{p}{100\%m}\right)^k = K \cdot \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{p}{100\%m}\right)^{\frac{100\%m}{p} \frac{p}{100\%m} k} =$$

$$= K \cdot e^{\frac{p}{100\%m} mt} = K \cdot e^{\frac{p}{100\%} t} \text{ gde je } e = 2,718281828459045...$$

Kako smo već rekli da je relativna kamatna stopa nepotrebna i nelogična, to sledi isto i za kontiunalno kapitalisanje koje je izvedeno iz nje.

Evo i konkretnog apsurda. Ako uzmemo da je godišnji procenat kamate $p = 100\%$ i broj godina $t = 1$, tada suma od $K = 100$ dinara kroz godinu dana naravno mora da bude 200 dinara, a kontinualnim kapitalisanjem bi iznosila $100 \cdot e = 271,828...$ dinara, što bi značilo da je godišnja kamatna stopa 172% (efektivna!) a ne 100% (nominalna!).

U računanju konfornom kamatnom stopom tj. formulom 2.8 ne pojavljuju se ovakvi apsurdi i tada ne postoji efektivna kamatna stopa, odnosno nominalna i efektivn su jednake.

U nekim institucijama efektivnu kamatnu stopu povećavaju zbog nekik svojih troškova, što je takođe apsurd.

Prema tome ako je p godišnji procenat kamate, obračun kamata m puta godišnje, tada posle k obračunskih perioda suma od K dinara iznosiće $K \cdot r_m^k$, gde je $r_m = 1 + \frac{p}{100\% m}$ ili $r_m = \sqrt[m]{1 + \frac{p}{100\%}}$, zavisno od toga da li hoćemo da računamo reletivnim kapitalisanjem ili konfornim kapitalisanjem.

Rečnikom finansijske matematike se to kaže da je suma od K dinara eskontovana na vreme posle k obračunskih perioda i tada njen novi iznos je $K \cdot r_m^k$ dinara

Primer 2.9 *Ako je godišnja kamata 6%, obračun kamata svaka 3 meseca tj. kapitalisanje tromesečno, koliko će iznositi suma od 10 000 dinara, posle 33 meseca, tj. koliko će iznositi njena eskontovana vrednost nakon 33 meseca*

Rešenje Tražena eskontovana vrednost biće
$K \cdot r_m^k = K \cdot (1 + \frac{p}{100\% m})^k = 10\,000 \cdot (1 + \frac{6}{100\% \cdot 4})^{11} \approx 11\,779,49$ dinara jer je obračunski period 3 meseca, a u 33 meseca naš obračunski period od 3 meseca sadrži se $\frac{33}{3} = 11$ puta, pa je ukupan broj obračunskih perioda $k = 11$.

Ako bi isti zadatak rešili sa godišnjim kapitalisanjem, faktiči konfornom kamatnom stopom tj. sa $K(t) = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100\%}\right)^t$, tada bi dobili $K(\frac{33}{12}) = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{6}{100\%}\right)^{\frac{33}{12}} = 11\,737,91957... \approx 11\,737,92$ dinara. jer je sada jedinica merenja vremena jedna godina pa je vreme $t = \frac{33}{12}$ godina, odnosno 2,75 godina.

Broj k ne mora biti ceo broj!

Definicija 2.10 Dekurzivna uplata je uplata na kraju obračunskoga perioda, a anticipativna na početku.

Evo postupak rešavanja problema iz finansijske matematike, redom po osnovnim koracima:

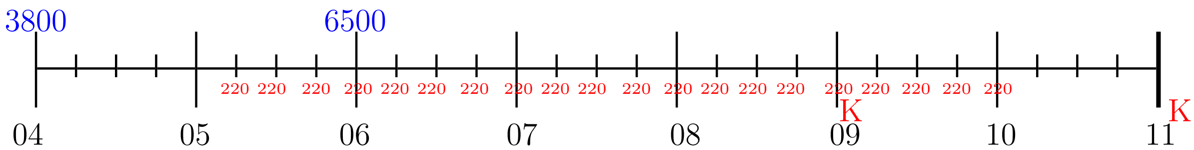
- Nacrta se vremenska osa, na kojoj se označe sva ona vremena koja se pojavljuju u formulaciji problema u kojima su neka novčana sredstva realizovana ili će biti realizovana, bilo od poverioca bilo od dužnika i iznos tih novčanih sredstava upišemo iznad ose plavom bojom ako pripada poveriocu, a ispod crvenom bojom ako pripada dužniku, naravno na tačno odgovarajućem mestu ose.

- Svaki od tih iznosa sa ose, eskontujemo na poslednji vremenski trenutak na toj vremenskoj osi tj. množimo ga sa r^k, gde je k broj obračunskih perioda od trenutka sa ose gde je taj iznos, do poslednjeg trenutka (debela crta) označenog na vremenskoj osi i $r = 1 + \frac{p}{100\% m}$ ili $r = \sqrt[m]{1 + \frac{p}{100\%}}$.
- Sada od svih tako eskontovanih iznosa, na taj poslednji trenutak na osi, formiramo jednačinu tako što zbir svih poveriocovih iznosa stavimo na levu stranu jednakosti, a dužnikovih na desnu. Pazi! Jednačina se formira od eskontovanih vrednosti svih iznosa na poslednji označeni trenutak na vremenskoj osi!

  Taj vremenski trenutak je podebljana vertikalna crta na slici na kraju vremenske ose!
- Rešavanjem ove jednačine dobija se nepoznata tražena u zadatku.

Zadatak *Dužnik je pozajmio početkom* 2005. *godine* 3800 *eura i* 6500 *eura krajem* 2006. *On se dogovorio sa svojim poveriocem da sve svoje dugove otplati tako što će dekurzivno tromesečno uplaćivati po* 220 *eura od početka* 2006. *do početka* 2011. *godine, a ostatak duga isplatiti u dve jednake rate i to jedna početkom* 2010. *a druga krajem* 2011. *godine. Koliko iznosi svaka od te dve rate ako je u svim obračunima kapitalisanje tromesečno i godišnji procenat kamate* 4, 9%.

Rešenje: Iznad ose u plavoj boji su euri od poverioca, ispod ose u crvenoj boji su euri dužnika i ispod ose u crnoj boji su oznke godina!



$$3\,800 \cdot r^{28} + 6\,500 \cdot r^{20} = 220 \cdot r^{23} + \ldots + 220 \cdot r^{4} + K \cdot r^{8} + K$$

$$3\,800 \cdot r^{28} + 6\,500 \cdot r^{20} = 220 \cdot r^{4} \cdot (r^{19} + r^{18} + \ldots + r + 1) + K \cdot (r^{8} + 1)$$
$$3\,800 \cdot r^{28} + 6\,500 \cdot r^{20} = 220 \cdot r^{4} \cdot \frac{r^{20}-1}{r-1} + K \cdot (r^{8} + 1) \quad \text{i} \quad r = 1 + \frac{4{,}9}{100\% \cdot 4}.$$

Ako je $A = 3\,800 \cdot r^{28}$, $B = 6\,500 \cdot r^{20}$, $C = 220 \cdot r^{4} \cdot \frac{r^{20}-1}{r-1}$ i $D = r^{8} + 1$, tada je $A + B = C + K \cdot D$, odnosno $K = \frac{A+B-C}{D} \approx \boxed{4\,013,22\ €}$

Jedina formula koju smo koristili je suma članova geometrijskog niza

$$r^{k-1} + r^{k-2} + \ldots + r + 1 = \frac{r^k - 1}{r-1}$$

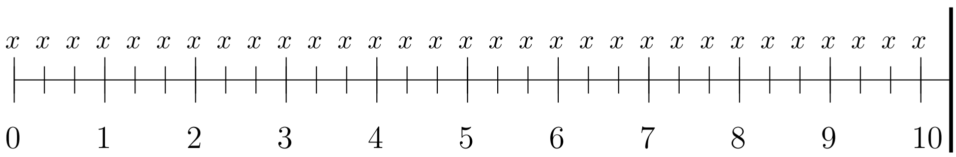
Ako se radi konformnom stopom, tada je $r = \sqrt[4]{1 + \frac{4,9}{100\%}}$ i $K \approx \boxed{3\,991,9\ \text{€}}$

Razni primeri

Zadatak 2.11 *Klijent banke štedi novac tako što svaka 4 meseca anti-ci-pativno uplaćuje po x=210€. Kolika će biti njegova ušteđevina nakon 10 godina i 4 meseci, ako je kapitalisanje svaka 4 meseca, a godišnji procenat kamate 4.2%?*

Rešenje:

Kako je 10 godina i 4 meseci jednako sa 124 meseca i kako su uplate četvoromesečne, onda je ukupan broj uplata $\frac{124}{4} = 31$. Sve uplate ćemo eskontovati na trenutak od 124 meseca (31 obračunskih perioda) od danas.

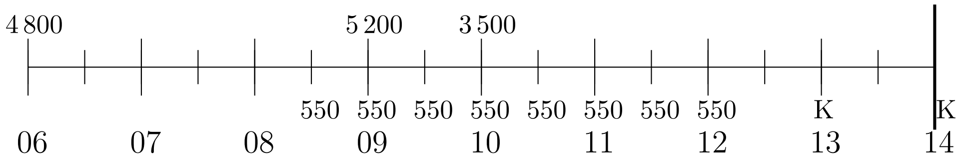


Ako sve uplate eskontujemona trenutak 124 meseca od početka štednje (podebljana linija na slici) i saberemo ih, dobija se da je ušteđevina

$$210 \cdot r^{31} + 210 \cdot r^{30} + \cdots + 210 \cdot r^2 + 210 \cdot r =$$
$$= 210 \cdot r \cdot (r^{30} + r^{29} + \cdots + r + 1) = 210 \cdot r \cdot \frac{r^{31}-1}{r-1}$$

Kako je $r = 1 + \frac{4.2}{100 \cdot 3} =$ sledi da je ušteđevina $\boxed{8\,194{,}85\text{€}}$

Zadatak 2.12 *Dužnik je početkom 2007. godine pozajmio 4800€ i dospevaju mu dugovi od 5200 € krajem 2009. i 3500€ početkom 2011. godine. On se dogovorio sa svojim poveriocem da sve svoje dugove otplati tako što će dekurzivno polugodišnje uplaćivati po 550€ od početka 2009. do početka 2013. godine, a ostatak duga isplatiti u dve jednake rate i to jedna početkom 2014. a druga krajem 2014. godine. Koliko iznosi svaka od te dve rate ako je u svim obračunima kapitalisanje polugodišnje i godišnji procenat kamate 8,2%?*



Rešenje:

Sva sredstva poverioca i dužnika eskontujemo na početak 2017. godine (podebljana linija). Ako na levu stranu stavimo zbir eskontovanih sredstva poverioca, a na desnu zbir eskontovanih sredstva dužnika, dobija se jednakost:

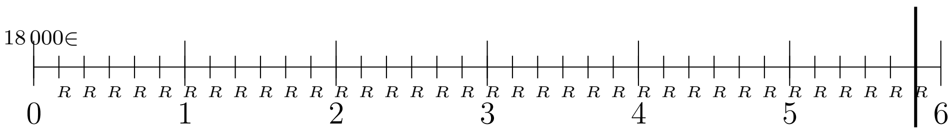
$$4800 \cdot r^{16} + 5200 \cdot r^{10} + 3500 \cdot r^8 =$$
$$= 550 \cdot r^{11} + 550 \cdot r^{10} + \cdots + 550 \cdot r^5 + 550 \cdot r^4 + K \cdot r^2 + K$$
$$4800 \cdot r^{16} + 5200 \cdot r^{10} + 3500 \cdot r^8 = 550 \cdot r^4 (r^7 + r^6 + \cdots + r + 1) + K \cdot (r^2 + 1)$$
$$4800 \cdot r^{16} + 5200 \cdot r^{10} + 3500 \cdot r^8 = 550 \cdot r^4 \cdot \frac{r^8-1}{r-1} + K \cdot (r^2 + 1)$$

Zamenom $r = 1 + \frac{8,2}{100 \cdot 2} = 1,041$ i uvođenjem oznaka $A = 4800 \cdot r^{16}$, $B = 5200 \cdot r^{10}$, $C = 3500 \cdot r^8$, $D = 550 \cdot r^4 \cdot \frac{r^8-1}{r-1}$ i $E = r^2 + 1$, dobijamo $A+B+C = D+K \cdot E$, a odavde sledi $K = \dfrac{A+B+C-D}{E} \approx$
$$\frac{9\,129,624376 + 7\,771,60356 + 4\,826,96200 - 5\,972,720538}{2,083681} \approx \boxed{7\,561,36€}$$

Zadatak 2.13 *Klijent banke je uzeo kredit od 18 000€. Otplaćuje ga dekurzivnim dvomesečnim ratama narednih 5 godina i 10 meseci. Kolika je rata, ako je kapitalisanje svaka 2 meseca, a godišnji procenat kamate 5,4%?*

Rešenje:

Kako je 5 godina i 10 meseci jednako sa 70 meseca i kako su uplate dvomesečne, onda je ukupan broj uplata $\frac{70}{2} = 35$. Sve rate ćemo eskontovati na trenutak od 70 meseca (35 obračunskih perioda) od danas.



Prema tome kada na taj trenutak (podebljana linija na slici) eskontujemo sve rate (R) i saberemo ih, dobija se jednakost:

$$18000 \cdot r^{35} = R \cdot r^{34} + R \cdot r^{33} + \cdots + R \cdot r + R,$$

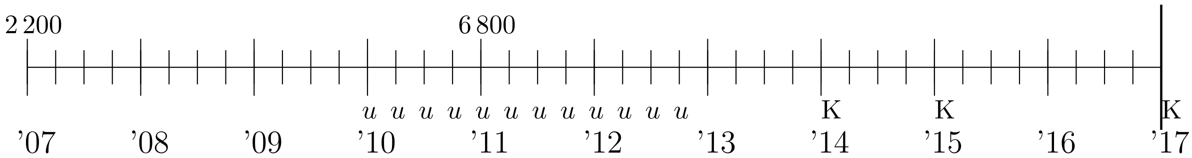
odavde dalje sledi $18000 \cdot r^{35} = R \cdot (r^{34} + r^{33} + \cdots + r + 1)$ odnosno

$18000 \cdot r^{35} = R \cdot \frac{r^{35}-1}{r-1}$. Zamenom $r = 1 + \frac{5,4}{100 \cdot 6} = 1,009$ dobija se $21\,150,15222 \dots = R \cdot 40,92554489\dots$ tj. $R \approx$ $\boxed{516{,}79586∈}$

Zadatak 2.14 *Dužnik je početkom 2008. godine pozajmio 2200∈ i dospeva mu dug od 6800∈ krajem 2011. On se dogovorio sa svojim poveriocem da sve svoje dugove otplati tako što će anticipativno kvartalno uplaćivati po 350∈ od početka 2011. do početka 2014. godine, a ostatak duga isplatiti u tri jednake rate i to jedna početkom 2015. a druga početkom 2016 i treća krajem 2017. godine. Koliko iznosi svaka od te tri rate, ako je u svim obračunima kapitalisanje kvartalno i godišnji procenat kamate 7,2%?*

Rešenje

Označimo uplate sa $u = 350$∈



Sva sredstva poverioca i dužnika eskontujemo na početak 2018. godine (podebljana linija). Ako na levu stranu stavimo sredstva poverioca, a na desnu sredstva dužnika, dobija se jednakost:

$2200 \cdot r^{40} + 6800 \cdot r^{24} =$
$= u \cdot r^{28} + u \cdot r^{27} + \dots + u \cdot r^{18} + u \cdot r^{17} + K \cdot r^{12} + K \cdot r^{8} + K$
$2200 \cdot r^{40} + 6800 \cdot r^{24} = u \cdot r^{17}(r^{11} + r^{10} + \dots + r + 1) + K \cdot (r^{12} + r^{8} + 1)$
$2200 \cdot r^{40} + 6800 \cdot r^{24} = u \cdot r^{17} \cdot \frac{r^{12}-1}{r-1} + K \cdot (r^{12} + r^{8} + 1)$

Zamenom $r = 1 + \frac{7,2}{100 \cdot 4} = 1,018$, $u = 350$ i uvođenjem oznaka $2200 \cdot r^{40}$, $B = 6800 \cdot r^{24}$, $C = u \cdot r^{17} \cdot \frac{r^{12}-1}{r-1}$ i $D = r^{12} + r^{8} + 1$, dobijamo $A + B = C + K \cdot D$, a odavde sledi

$$K = \frac{A + B - C}{D} \approx \boxed{2546{,}69∈}$$

Zadatak 2.15 *Štediša danas otvara račun. Godišnja kamata je* $6,7\%$.
a) *Ako banka kapitališe kvartalno (tromesečno), koliki gotovinski iznos štediša treba da stavi na račun da bi se nakon 5 godina od dana ulaganja, na njemu nalazilo 8400 ∈?*

b) *Ako štediša odluči da početkom svakog meseca uplaćuje po 150 €, koliko će se na računu nalaziti nakon 7 godina od dana prve uplate, ako je kapitalisanje godišnje? (koristiti konformnu kamatnu stopu)*

Rešenje:
a) Broj obračunskih perioda $5 \cdot 4 = 20$. Stavljajući $r = 1 + \frac{6{,}7}{100 \cdot 4} = 1{,}01675$, dobija se da je traženi iznos $X = \frac{8400}{r^{20}} \approx 6025{,}54$ €.
b) Broj rata je $7 \cdot 12 = 84$. Nakon 7 godina na računu će se nalaziti $150 \cdot r^{84} + 150 \cdot r^{83} + \cdots + 150 \cdot r = 150 \cdot r \frac{r^{84}-1}{r-1}$. Uzimajući da je $r = \sqrt[12]{1{,}067} = 1{,}0054188..$ dobija se $150 \cdot r \frac{r^{84}-1}{r-1} \approx 15989{,}75$ €.

Zadatak 2.16 *Na računu u banci Pera ima 100000 din. Godišnji procenat kamate je 5%.*
a) *Koliko će novca imati Pera na računu banke nakon 8 godina i 3 meseca, ako je kapitalisanje kvartalno (tromesečno)?*
b) *Pera je odlučio da „očisti" račun, tako što će podići tri puta isti iznos, prvi put krajem druge, drugi put krajem četvrte, a treći put krajem šeste godine od danas. Koliko dinara će podizati, ako je kapitalisanje godišnje?*

Rešenje:
a) Broj obračunskih perioda $(8 \cdot 12 + 3) : 3 = 99 : 4 = 33$. Stavljajući $r = 1 + \frac{5}{100 \cdot 4} = 1{,}0125$, dobija se da je traženi iznos
$$X = 100000 \cdot r^{33} = 150673{,}214 \text{ €}.$$
b) Ako se izjednačavanje izvrši u trenutku nakon 6 godina, sve isplate moraju biti jednake sumi na računu, te je $X \cdot r^4 + X \cdot r^2 + X = 100000 \cdot r^6$. Odavde sledi $X \approx 40388{,}58$ €.

Zadatak 2.17 *Kredit za kupovinu auta otplaćuje se 5 godina jednakim dekurzivnim mesečnim ratama koje iznose po 249,1 €. Kapitalisanje je mesečno, a godišnji procenat kamate 9%. Nakon 18 meseci otlaćivanja kredita, poverilac i dužnik su se dogovorili da će se preostali deo duga isplatiti u 3 jednake polugodišnje dekurzivne rate u naredih godinu i po dana, uz polugodišnje kapitalisanje i godišnji procenat kamate od 12%, pri čemu se ovi novi uslovi odnose na sva sredstva nakon dve godine otplaćivanja. Koliko iznosi novougovorena rata?*

Rešenje:
Uzimamo da je $r = 1 + \frac{9}{100\cdot 12} = 1,0075$. Ostatak duga nakon 18 obračunskih perioda i 18 plaćenih rata $R = 249,1$ je D_{18}. Broj preostalih rata je 60-18=42. Kako je $D_{18} \cdot r^{42} = R\frac{r^{42}-1}{r-1}$, sledi da je $D_{18} = R \cdot \frac{1-r^{-42}}{r-1} = 8946,10581... \approx 8946,11$ €. Dakle, na dan novog ugovora ostatak duga je $8946,11$ €. Ovaj iznos će se otplatiti sa 3 polugodišnje dekurzivne rate X. Izjednačavanjem svih uplata i dugovanje u trenutku nakon 3 obračunska perioda, t.j. nakon godinu i po, dobijamo $X \cdot r_1^2 + X \cdot r_1 + X = 8946,11 \cdot r_1^3$. Uzimajući $r_1 = 1 + \frac{12}{100\cdot 2} = 1,06$ dobija se $X \approx 3346,83$ €.

Zadatak 2.18 *Kredit za kupovinu automobila iznosi od* 12000 € *i otplaćuje se 5 godina jednakim dekurzivnim mesečnim ratama. Kapitalisanje je mesečno, a godišnji procenat kamate* 9%. *Nakon* 2 *godine otlaćivanja kredita, poverilac i dužnik su se dogovorili da će se preostali deo duga isplatiti u* 3 *jednake polugodišnje dekurzivne rate u naredih godinu i po dana, uz polugodišnje kapitalisanje i godišnji procenat kamate od* 12%, *pri čemu se ovi novi uslovi odnose na sva sredstva nakon dve godine otplaćivanja. Koliko iznosi novougovorena rata?*

Rešenje
Uzimamo da je $r = 1 + \frac{9}{100\cdot 12} = 1,0075$. Kredit $K = 12000$ € treba otplatiti sa $5\cdot 12 = 60$ mesečnih rata R. Kako je $R\frac{r^{60}-1}{r-1} = 12000\cdot r^{60}$, sledi da je $R = 12000\frac{r-1}{1-r^{-60}} = 249,10026... \approx 249,1$ €. Nakon 2 godine, t.j. nakon 24 otplatnih perioda ostatak duga je $D_{24} = K \cdot r^{24} - R\frac{r^{24}-1}{r-1}$, uzimajući $K = 12000$, $R = 249,1$ i $r = 1,0075$ dobija se $D_{24} \approx 7833,41$ €. Dakle, na dan novog ugovora ostatak duga je $7833,41$ €. Ovaj iznos će se otplatiti sa tri polugodišnje dekurzivne rate X. Izjednačavanjem svih uplata i dugovanje u trenutku nakon 3 obračunska perioda, t.j. nakon godinu i po, dobijamo $X \cdot r_1^2 + X \cdot r_1 + X = 7833,41 \cdot r_1^3$. Uzimajući $r_1 = 1 + \frac{12}{100\cdot 2} = 1,06$ dobija se $X \approx 2930,56$ €.

Zadatak 2.19 *Podignut je kredit koji će se otplaćivati četiri godine, jednakim godišnjim dekurzivnim ratama uz godišnje kapitalisanje i godišnju kamatnu stopu od* 9%. *Rata iznosi* 2469,35 €. *Napraviti otplatni plan.*

Rešenje
Kako je $R \cdot \frac{r^4-1}{r-1} = K \cdot r^4$, gde je $r = 1,09$ i $R = 2469,35$, iznos kredita je $K = 2469,35 \cdot \frac{1-r^{-4}}{r-1} \approx 8000$ € . Otplatni plan za ovaj kredit je

k	D_{k-1}	I_k	B_k	R_k
1	8000	720	1749,35	2469,35
2	6250,65	562,56	1906,79	2469,35
3	4343,86	390,95	2078,4	2469,35
4	2265,46	203,89	2265,46	2469,35
		1877,4	8000	9877,4

Zadatak 2.20 *Podignut je kredit od 80000 din., koji će se otplaćivati 3 meseca, jednakim mesečnim dekurzivnim ratama uz godišnje kapitalisanje i godišnju kamatnu stopu od 23%. Napraviti otplatni plan. (koristiti konformnu kamatnu stopu)*

Rešenje:
Kako je $R \cdot \frac{r^3-1}{r-1} = K \cdot r^3$, gde je $r = \sqrt[12]{1,23} = 1,017400842...$ i $K = 80000$, iznos mesečne rate je $R = 80000 \cdot \frac{r-1}{1-r^{-3}} \approx 27600,05$ € . Otplatni plan za ovaj kredit je

k	D_{k-1}	I_k	B_k	R_k
1	80000	1392,07	26207,98	27600,05
2	53792,02	936,03	26664,02	27600,05
3	27128	472,05	27128	27600,05
		2800,15	80000	82800,15

Glava 3

Pricipi aktuarske matematike

Osnovu aktuarske matematike čine finasijska matematika i tablice smrtnosti. Kako je finasijska matematika obrađena u ptrehodnoj glavi, objasnimo ukratko šta su to tablice smrtnosti (Nalaze se na kraju).

Kao što se vidi iz samih tablica u prvoj koloni označenoj sa x nalaze se brojevi 10,11,12,13,...,99, koji označavaju broj godina starosti posmatranih lica. U drugoj koloni, označenoj sa l_x nalaze se redom brojevi koji pokazuju koliko ima živih ljudi iz posmatrane populacije koji su stari redom 10,11,12,13,...,99 godina. Prema tome

Definicija 3.1 *Broj l_x predstavlja broj živih lica starih x godina.*

Definicija 3.2
Broj d_x predstavlja broj umrlih lica u toku $x+1-$ ve godine, odnosno broj umrlih lica koji su doživeli x godina, a ni su doživeli $x+1$ godina.

Posledica 3.3 $d_x = l_x - l_{x+1}$

Mnoge institucije mnogih zemalja prave tablice smrtnosti za svoje potrebe. Ovde se nećemo upuštati u tehnologiju konstruisanja tablica smrtnosti, već ćemo odmah preći na njihove primene uz pomoć verovatnoće i finansijske matematike.

Primer 3.4
Kolika je verovatnoća da lice staro x godina doživi x+1 godina?

Kako od l_x živih lica njih živih ostane l_{x+1}, to je tražena verovatnoća u oznaci p_x jednaka $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$.

Primer 3.5 *Kolika je verovatnoća da lice staro x godina živeti još tačno n godina?*

Kako od l_x živih lica, njih živih kroz n ostane l_{x+n}, to je tražena verovatnoća u oznaci ${}_np_x$ jednaka ${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$.

A 3.6 Verovatno trajanje života

Koliko će još verovatno godina živeti lice staro x godina?

Pretpostavimo da će živeti verovatno još n godina. Tada je logično da reč verovatno shvatimo u smislu da je njih pola doživelo starost od $x+n$ godina. Prema tome imamo da je:

$$l_{x+n} = \frac{l_x}{2}$$

Primer 3.7 *Koliko će još* verovatno *živeti lice staro* 50 *godina?*

Iz $l_{x+n} = \frac{l_x}{2}$ sledi $l_{50+n} = \frac{l_{50}}{2} = \frac{69\,517}{2} = 34\,785,5$. Međutim iz tablice smrtnosti 17 engleskih društava sledi da je $l_{71} < 34\,785,5 < l_{70}$ tj. $l_{71} < l_{50+n} < l_{70}$, što znači $70 < 50+n < 71$ i $20 < n < 21$, pa će posmatrano lice živeti još verovatno između 20 i 21 godina.

A 3.8 Utvrđivanje tarifa premije tj. mize za obezbeđenje rente

1. Premiju odnosno mizu osiguranik može uplatiti jednokratno zbog dobijanja rente, a može da vrši plaćanje i u ratama.

2. Prema početku primanja renta može biti neposredna, što znači prima je odma nakon uplate premije ili odložena za neki vremenski period.

3. Prema završetku primanja rente, ona može biti doživotna ili privremena.

4. U zavisnosti da li se prima na početku ili na kraju godine, zove se redom anticipativna renta i dekurzivna renta.

5. Renta je lična ako je dobija samo osiguranik dok je živ, a ne njegovi naslednici.

U svim obračunima računaćemo samo neto premije tj. mize.

Lako se dalje obračunavaju troškovi akvizicije, administracije i inkaso troškovi, čijim dodavanjem na neto premiju, dobija se bruto premija.

Svaki od sledećih obračuna je ustvari jedan zadatak iz finasijske matematike uz korišćenje tablica smrtnosti.

A 3.9

Neposredna doživotna lična renta

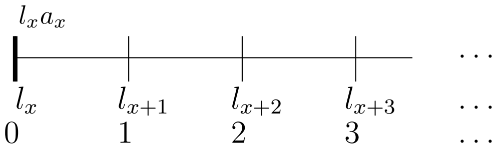
Neka je R renta koju dobija osiguranik svake godine, jer je izvršio jednokratnu uplatu mize M. Izračunajmo mizu M ako se renta prima početkom svake godine (anticipativno) i korišćenjem tablica smrtnosti 17 engleskih društava.

Neka se u nekom osiguravajućem društvu pojavilo l_x ljudi (naravno živih) i svi stari x godina. Oni su odlučili da se svi osiguraju na isti način i to neposrednom doživotnom ličnom rentom.

Označimo sa a_x premiju koju mora da uplati svako od l_x lica da bi dobijali na početku svake godine po 1 dinar sve dokraja života.

Sada zbir svih uplata osiguranika, sa jedne strane, mora biti jednak zbiru svih isplata osiguravajućega društva sa druge strane, naravno sve u istom vremenskom trenutku tj. moraju se sve uplate i islplate eskontovati ili diskontovati na isto vreme tj. na primer, na datum označen širokom crticom na vremenskoj osi.

Označimo na vremenskoj osi sa 0 trenutak kada je svako od l_x lica osiguravajućem društvu uplatilo po a_x dinara i kada je istovremeno svaki od njih dobio po 1 dinar odnosno društvo isplatilo ukupno l_x dinara. Dalje redom sa $1, 2, 3, \ldots$ označimo trenutke na vremenskoj osi nakon jedne, dve, tri, $\ldots$ godina, kada je društvo svim preživelima isplaćivalo, svakom po jedan dinar, redom ukupno po $l_{x+1}, l_{x+2}, l_{x+3}, \ldots$ dinara.



$$l_x a_x = l_x + \tfrac{l_{x+1}}{r} + \tfrac{l_{x+2}}{r^2} + \tfrac{l_{x+3}}{r^3} + \ldots$$

Iznad vremenske ose, na odgovarajućem mestu, upisujemo vrednosti koje su uplatili osiguranici, a ispod vremenske ose, na odgovarajućim mestima, upisujemo sve vrednosti koje isplaćuje osiguravajuće društvo osiguranicima.

Kako su isplate anticipativne, to u trenutku 0 osiguravajuće društvo mora da isplati svakom od l_x lica po jedan dinar tj. ukupno l_x dinara. U trenutku 1 osiguravajuće društvo mora da isplati po jedan dinar svakom od preživelih l_{x+1} lica tj. isplaćuje l_{x+1} dinara itd. Sve isplate ćemo diskontovati na trenutak 0 (veća crtica na vremenskoj osi)i zatim na levu stranu jednakosti stavimo zbir svih uplata od osiguranika, a na desnu stranu stavimo zbir svih isplata osiguravajućeg društva, ali naravno diskontovane na trenutak 0. Tako dobijamo jednakost:

Činjenica 3.10 $$l_x \cdot a_x = l_x + \tfrac{l_{x+1}}{r} + \tfrac{l_{x+2}}{r^2} + \tfrac{l_{x+3}}{r^3} + \ldots$$

Odavde se dobija neto miza a_x za 1 dinar rente, a za R dinara rente neto miza je $M = R \cdot a_x$.

Činjenica tj. algoritam 3.10 se isprogramira za računar i time je problem rešen.

Kako nekada nisu postojali računari, ovo računanje je bilo teže, pa su se zbog jednostavnosti računanja uvodile razne nove oznake, nazivane komutativnim brojevima (ne znam zbog čega baš tako) i unošene u tebelu zajedno sa brojevima l_x.

Prema tome u tabeli je dovoljno da imamo samo kolonu za l_x, jer sve dalje nam daje računar.

Prikažimo kako se to nekada radilo, a nažalost i dan danas aktuari tako rade, sa punim tablicama takozvanih komutativnih brojeva, bilo od 17 engleskih društava, rađenih na bazi 4% godišnje kamatne stope, bilo sa najnovijim tablicama smrtnosti srbije 2000-2002 godine rađene na bazi 3% godišnje kamatne stope.

A šta ako neko zahteva da se radi sa 5% godišnje kamatne stope!

Izvedimo sada jednakosti koje su posledice uvođenja tih novih oznaka, komutativnih brojeva. Prvo jednakost 3.10 pomnožimo sa $\frac{1}{r^x}$ i dobijamo

$$\frac{l_x}{r^x} \cdot a_x = \frac{l_x}{r^x} + \frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} + \frac{l_{x+2}}{r^{x+2}} + \frac{l_{x+3}}{r^{x+3}} + \dots$$

a zatim uvođenjem oznake $\frac{l_w}{r^w} = D_w$, $w = 10, 11, 12, \dots, 99$ sledi

$$D_x \cdot a_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} \dots,$$

a zatim se uvodi i oznaka $N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} \dots$.

Brojevi D_x i N_x zovu se komutativni brojevi.

Činjenica 3.11 *Miza M za anticipativnu neposrednu doživotnu ličnu rentu R iznosi* $\boxed{M = R \cdot a_x = R \cdot \frac{N_x}{D_x}}$

Ako neko ima u računaru isprogramiranu činjenicu 3.10, tj. izračunavanje broja a_x, tada njemu ne trebaju tablice sa komutativnim brojevima.

Analogno dobijamo da miza M za dekurzivnu neposrednu doživotnu ličnu rentu R iznosi:

Činjenica 3.12 *Miza M za dekurzivnu neposrednu doživotnu ličnu rentu R iznosi* $\boxed{M = R \cdot a_x = R \cdot \frac{N_{x+1}}{D_x}}$

Primer 3.13 *Osoba od 40 godina, osigurala se da doživotno prima svake godine rentu $R = 5\,000$€ koju će primati od trenutka osiguranja pa sve do kraja života. Kolika neto miza (premija) je uplaćena za ovo osiguranje ako je renta* **a)** *anticipativna,* **b)** *dekurzivna?*

Rešenje:

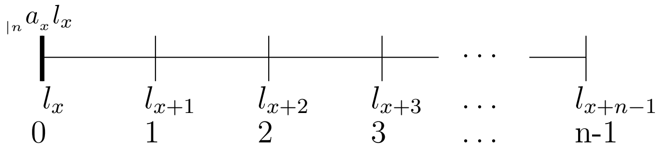
a) $M = 5\,000 \cdot \frac{N_{40}}{D_{40}} = 5\,000 \cdot \frac{263\,643.62}{16\,382.56} = 80\,464.72$€

b) $M = 5\,000 \cdot \frac{N_{41}}{D_{40}} = 5\,000 \cdot \frac{247\,261.06}{16\,382.56} = 75\,464.72$€

A 3.14 Neposredna privremena lična renta

Neka je renta 1 dinar, koju osiguranik prima anticipativno tj. od trenutka uplate mize ${}_{|n}a_x$, tačno n godina, ili manje od n godina ako je pre isteka tih n godina preminuo.

Vremenska osa za ovaj obračun je



odakle diskontovanjem na trenutak prve isplate (široka crtica na vremenskoj osi) i sabiranjem sledi

$$l_x \cdot {}_{|n}a_x = l_x + \frac{l_{x+1}}{r} + \frac{l_{x+2}}{r^2} + \frac{l_{x+3}}{r^3} + \ldots + \frac{l_{x+n-1}}{r^{n-1}} \Big/ \cdot \frac{1}{r^x}$$

$$\frac{l_x}{r^x} \cdot {}_{|n}a_x = \frac{l_x}{r^x} + \frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} + \frac{l_{x+2}}{r^{x+2}} + \frac{l_{x+3}}{r^{x+3}} + \ldots + \frac{l_{x+n-1}}{r^{x+n-1}}$$

$$D_x \cdot {}_{|n}a_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots + D_{x+n-1}$$

Kako je

$$N_x = D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{x+n-1} + D_{x+n} + D_{x+n+1} + \ldots \quad \text{i}$$
$$N_{x+n} = D_{x+n} + D_{x+n+1} + \ldots \quad \text{to je}$$

$N_x - N_{x+n} = D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{x+n-1}$. Dalje je

$D_x \cdot {}_{|n}a_x = N_x - N_{x+n}$ tj. ${}_{|n}a_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$, i sledi

Činjenica 3.15 *Miza M za anticipativnu neposrednu privremenu ličnu rentu R iznosi* $\boxed{M = R \cdot {}_{|n}a_x = R \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}}$

Analogno se dobija i

Činjenica 3.16 *Miza M za dekurzivnu neposrednu privremenu ličnu rentu R iznosi* $\boxed{M = R \cdot \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}}$

Primer 3.17 *Osoba od* 45 *godina, osigurala se da prima svake godine rentu $R = 5\,000$€ koju će primati od trenutka osiguranja ali najviše* 10 *godina ili manje od n godina ako je pre isteka tih n godina preminuo. Kolika neto miza (premija) je uplaćena za ovo osiguranje ako je renta* **a)** *anticipativna,* **b)** *dekurzivna?*

Rešenje:

a) $M = 5\,000 \cdot \frac{N_{45}-N_{55}}{D_{45}} = 5\,000 \cdot \frac{189\,326.69-87\,924.183}{12\,743.15} = 39\,751.75€.$

b) $M = 5\,000 \cdot \frac{N_{46}-N_{56}}{D_{45}} = 5\,000 \cdot \frac{176\,583.54-80\,583.643}{12\,743.15} = 37\,667.26€.$

A 3.18

Odložena doživotna lična renta

Neka je renta 1 dinar, koju osiguranik počinje da prima anticipativno (na početku) svake godine, k godina nakon uplate mize od ${}_{k|}a_x$ dinara, do kraja svog života. Vremenska osa za ovaj obračun je

${}_{k|}a_x l_x$					
		$\dots$	l_{x+k}	l_{x+k+1}	$\dots$
0	1	$\dots$	k	k+1	$\dots$

odakle diskontovanjem svih iznosa na trenutak uplate mize od strane osiguranika (široka crtica na vremenskoj osi) i sabiranjem sledi

$${}_{k|}a_x \cdot l_x = \frac{l_{x+k}}{r^k} + \frac{l_{x+k+1}}{r^{k+1}} + \frac{l_{x+k+2}}{r^{k+2}} + \dots \Big/ \cdot \frac{1}{r^x}$$

$${}_{k|}a_x \cdot \frac{l_x}{r^x} = \frac{l_{x+k}}{r^{x+k}} + \frac{l_{x+k+1}}{r^{x+k+1}} + \frac{l_{x+k+2}}{r^{x+k+2}} + \dots$$

${}_{k|}a_x \cdot D_x = D_{x+k} + D_{x+k+1} + D_{x+k+2} + \dots = N_{x+k}$ i sledi

Činjenica 3.19 *Miza M za anticipativnu odloženu doživotnu ličnu rentu R iznosi* $\boxed{M = R \cdot {}_{k|}a_x = R \cdot \frac{N_{x+k}}{D_x}}$

Analogno se dobija i

Činjenica 3.20 *Miza M za dekurzivnu odloženu doživotnu ličnu rentu R iznosi* $\boxed{M = R \cdot {}_{k|}a_x = R \cdot \frac{N_{x+k+1}}{D_x}}$

Primer 3.21 *Osoba od* 37 *godina, osigurala se da prima svake godine doživotno rentu $R = 5\,000€$ ali tek nakon* 12 *godina od trenutka osiguranja. Kolika neto miza (premija) je uplaćena za ovo osiguranje ako je renta* **a)** *anticipativna,* **b)** *dekurzivna?*

Rešenje:
a) $M = 5\,000 \cdot \frac{N_{49}}{D_{37}} = 5\,000 \cdot \frac{142\,094.38}{18\,986.95} = 37\,418.96€.$
b) $M = 5\,000 \cdot \frac{N_{50}}{D_{37}} = 5\,000 \cdot \frac{131\,765.619}{18\,986.95} = 34\,698.99€.$

A 3.22

Odložena privremena lična renta

Neka je renta 1 dinar, koju osiguranik počinje da prima anticipativno (na početku) svake godine, k godina nakon uplate mize od ${}_{k|n}a_x$ dinara, ali tačno n godina, ili manje od n godina ako je pre isteka tih n godina preminuo. Vremenska osa za ovaj obračun je

${}_{k\|n}a_x l_x$						
		$\dots$	l_{x+k}	l_{x+k+1}	$\dots$	$l_{x+k+n-1}$
0	1	$\dots$	k	k+1	$\dots$	k+n-1

odakle diskontovanjem svih iznosa na trenutak uplate mize od strane osiguranika (široka crtica na vremenskoj osi) i sabiranjem sledi

$${}_{k|n}a_x \cdot l_x = \frac{l_{x+k}}{r^k} + \frac{l_{x+k+1}}{r^{k+1}} + \dots + \frac{l_{x+k+n-1}}{r^{k+n-1}} \Big/ \cdot \frac{1}{r^x}$$
$${}_{k|n}a_x \cdot \frac{l_x}{r^x} = \frac{l_{x+k}}{r^{x+k}} + \frac{l_{x+k+1}}{r^{x+k+1}} + \dots + \frac{l_{x+k+n-1}}{r^{x+k+n-1}}$$
$${}_{k|n}a_x \cdot D_x = D_{x+k} + D_{x+k+1} + \dots + D_{x+k+n-1}$$
${}_{k|n}a_x \cdot D_x = N_{x+k} - N_{x+k+n}$ pa sledi

Činjenica 3.23 *Miza M za anticipativnu odloženu privremenu ličnu rentu R iznosi* $\boxed{M = R \cdot {}_{k|n}a_x = R \cdot \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x}}$

Analogno se dobija i

Činjenica 3.24 *Miza M za dekurzivnu odloženu privremenu ličnu rentu R iznosi* $\boxed{M = R \cdot {}_{k|n}a_x = R \cdot \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_x}}$

Primer 3.25 *Osoba od* 33 *godina, osigurala se da prima svake godine rentu od* $R = 5\,000€$ *ali tek nakon* 15 *godina od trenutka osiguranja i tačno* 10 *godina, ili manje od* 10 *godina ako je pre isteka tih* 10 *godina preminuo. Kolika neto miza (premija) je uplaćena za ovo osiguranje ako je renta* **a)** *anticipativna,* **b)** *dekurzivna?*

Rešenje:

a) $M = 5\,000 \cdot \frac{N_{33+15} - N_{33+15+10}}{D_{33}} = 5\,000 \cdot \frac{85\,799.50}{23\,048.30} = 18\,612.98€.$

b) $M = 5\,000 \cdot \frac{N_{49} - N_{59}}{D_{33}} = 5\,000 \cdot \frac{142\,094.38 - 61\,109.405}{23\,048.30} = 17\,568.54€.$

A 3.26

Utvrđivanje tarifa kod osiguranja kapitala

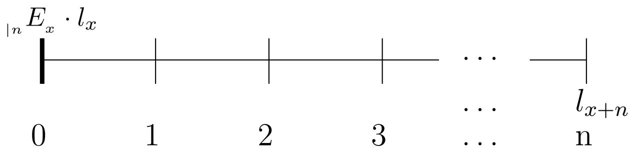
Za razliku od oosiguranja rente, koja se isplaćuje svake godine, kod osiguranja kapitala osigurani kapital se isplaćuje samo jednom ili eventualno nekoloko puta.

A 3.27

Osiguranje kapitala za slučaj doživljenja

Kao što se iz naziva vidi, osigurani kapital K se isplaćuje osiguraniku samo ako je živ u trenutku dogovorenom za isplatu. U protivnom kapital ostaje osiguravajućoj kompaniji.

Ako neto mizu za jedan dinar ovoga osiguranja obeležimo sa ${}_{|n}E_x$, tada vremenska osa za ovaj obračun je



jer je u trenutku 0 svako l_x osiguranika uplatio ${}_{|n}E_x$ dinara, tj. ukupno su uplatili $l_x \cdot {}_{|n}E_x$, a osiguravajuće društvo je isplatilo po 1 dinar svakom od preživelih l_{x+n} osiguranika, odnosno ukupno l_{x+n} dinara i odakle diskontovanjem na trenutak uplate mize od strane svih osiguranika (široka crtica na vremenskoj osi) sledi

$$l_x \cdot {}_{|n}E_x = \frac{l_{x+n}}{r^n} \Big/ \cdot \frac{1}{r^x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{l_x}{r^x} \cdot {}_{|n}E_x = \frac{l_{x+n}}{r^{x+n}} \Leftrightarrow D_x \cdot {}_{|n}E_x = D_{x+n} \Leftrightarrow {}_{|n}E_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

pa sledi

Činjenica 3.28 *Miza M za osiguranje kapitala K za slučaj doživljenja nakon n godina iznosi* $\boxed{M = K \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}}$

Primer 3.29 *Osoba od* 37 *godina, osigurala je* 10 000€ *da joj se isplati kada napuni* 67 *godina, ukoliko je doživela te godine. Kolika neto miza (premija) je uplaćena za ovo osiguranje?*

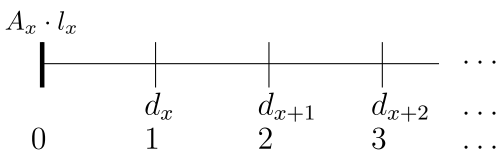
Rešenje: $M = K \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x} = 10\,000 \cdot \frac{D_{67}}{D_{37}} = 10\,000 \cdot \frac{3\,074.814}{18\,986.95} = 1\,619.44$€

A 3.30
Osiguranje kapitala za slučaj smrti (DOŽIVOTNO)

Osigurani kapital K isplaćuje se naslednicima na kraju godine u kojoj je nastupila smrt osiguranika. Odredimo neto mizu M za ovu vrstu osiguranja kapitala K.

Neka je A_x premija (miza) za osiguranje kapitala od 1 dinar.

Kako je u trenutku 0 došlo l_x živih osiguranika starih x godina da se osigura i uplatilo svako po A_x dinara, a osiguravajuće društvo isplaćuje na karaju prve, druge, treće itd. godine redom po d_x, d_{x+1}, d_{x+2} dinara, to je vremenska osa



odakle diskontovanjem svih isplata osiguravajućeg društva na trenutak uplate mize od strane svih osiguranika (široka crtica na vremenskoj osi) sledi

$$l_x \cdot A_x = \frac{d_x}{r} + \frac{d_{x+1}}{r^2} + \frac{d_{x+2}}{r^3} + \dots \Big/ \cdot \frac{1}{r^x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{l_x}{r^x} \cdot A_x = \frac{d_x}{r^{x+1}} + \frac{d_{x+1}}{r^{x+2}} + \frac{d_{x+2}}{r^{x+3}} + \dots \quad \Leftrightarrow$$

a zatim uvođenjem oznake $\frac{d_w}{r^{w+1}} = C_w$, $w = 10, 11, 12, \dots, 99$ sledi

$$\Leftrightarrow \quad D_x \cdot A_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \dots$$

a zatim se uvodi i oznaka $M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} \dots$, pa je

$$\Leftrightarrow \; A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

Brojevi C_x i M_x zovu se komutativni brojevi (tabela na kraju). Sada sledi

Činjenica 3.31 *Miza* M *za doživotno osiguranje kapitala* K *naslednicima u slučaju smrti osiguranika iznosi* $\boxed{M = K \cdot \frac{M_x}{D_x}}$

Primer 3.32 *Osoba od* 45 *godina, osigurala je* 10 000€ *da se isplati njenim nasledenicima kada god ona umrala na kraju te godine. Kolika neto miza (premija) je uplaćena za ovo osiguranje?*

Rešenje: $M = K \cdot \frac{M_x}{D_x} = 10\,000 \cdot \frac{M_{45}}{D_{45}} = 10\,000 \cdot \frac{5\,461.36}{12\,743.15} = 4\,285.72$€

A 3.33
Osiguranje kapitala za slučaj smrti (PRIVREMENO - n godina)

Osigurani kapital K isplaćuje se naslednicima na kraju godine u kojoj je nastupila smrt osiguranika, samo ako je osiguranik umro u toku prvih n godina od trenutaka osiguranja (uplate mize). Odredimo neto mizu M za ovu vrstu osiguranja kapitala K.

Neka je ${}_{|n}A_x$ premija (miza) za ovakvo osiguranje kapitala od 1 dinar.

Kako je u trenutku 0 došlo l_x živih osiguranika starih x godina da se osigura i uplatilo svako po ${}_{|n}A_x$ dinara, a osiguravajuće društvo isplaćuje na karaju prve, druge, treće, ... n-te godine redom po $d_x, d_{x+1}, d_{x+2}, \ldots d_{x+n-1}$ dinara, to je vremenska osa

$$\begin{array}{cccccc} {}_{|n}A_x \cdot l_x & & & & & \\ \hline & d_x & d_{x+1} & d_{x+2} & \ldots & d_{x+n-1} \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & \text{n} \end{array}$$

odakle diskontovanjem svih isplata osiguravajućeg društva na trenutak uplate mize od strane svih osiguranika (široka crtica na vremenskoj osi) sledi

$$l_x \cdot {}_{|n}A_x = \frac{d_x}{r} + \frac{d_{x+1}}{r^2} + \frac{d_{x+2}}{r^3} + \ldots + \frac{d_{x+n-1}}{r^n} \Big/ \cdot \frac{1}{r^x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{l_x}{r^x} \cdot {}_{|n}A_x = \frac{d_x}{r^{x+1}} + \frac{d_{x+1}}{r^{x+2}} + \frac{d_{x+2}}{r^{x+3}} + \ldots + \frac{d_{x+n-1}}{r^{x+n}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad D_x \cdot {}_{|n}A_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots + C_{x+n-1}$$

Kako je

$$\begin{aligned} M_x &= C_x + C_{x+1} + \ldots + C_{x+n-1} + C_{x+n} + C_{x+n+1} + \ldots \quad \text{i} \\ M_{x+n} &= \phantom{C_x + C_{x+1} + \ldots + C_{x+n-1} +} C_{x+n} + C_{x+n+1} + \ldots \quad \text{to je} \end{aligned}$$

$M_x - M_{x+n} = C_x + C_{x+1} + \ldots + C_{x+n-1}$. Dalje je
$D_x \cdot {}_{|n}A_x = M_x - M_{x+n}$ tj. ${}_{|n}A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$, i sledi

Činjenica 3.34
Miza M za privremeno osiguranje kapitala K na n godina, u slučaju smrti osiguranika iznosi $\boxed{M = K \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}}$

Primer 3.35 *Osoba od* 45 *godina, osigurala je* 10 000€ *da se isplati njenim nasledenicima na kraju te godine kada god je umrla, ali najviše* 20 *godina od trenutka osiguranja. Drugim rečima, ako je ta osoba preminula nakon* 65 *godina starosti, onda njeni naslednici ništa ne dobijaju. Kolika neto miza (premija) je uplaćena za ovo osiguranje?*

Rešenje: $M = 10\,000 \cdot \frac{5\,461.36 - 2\,411.62}{12\,743.15} = 2\,393.24$€

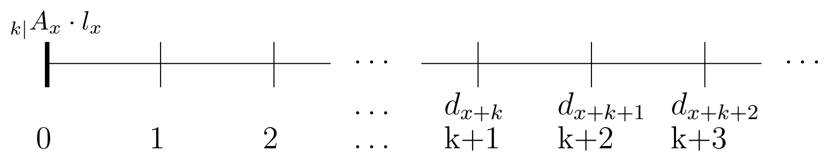
A 3.36

Osiguranje kapitala za slučaj smrti (ODLOŽENO - k godina)

Osigurani kapital K isplaćuje se naslednicima na kraju godine u kojoj je nastupila smrt osiguranika, samo ako je osiguranik umro nakon k godina od trenutaka osiguranja (uplate mize). Ako je osiguranik umro pre isteka od k godina, tada naslednici ne dobijaju ništa, odnosno kapital ostaje osiguravajućem društvu. Odredimo neto mizu M za ovu vrstu osiguranja kapitala K.

Neka je ${}_{k|}A_x$ premija (miza) za ovakvo osiguranje kapitala od 1 dinar.

Kako je u trenutku 0 došlo l_x živih osiguranika starih x godina da se osigura i uplatilo svako po ${}_{k|}A_x$ dinara, a osiguravajuće društvo isplaćuje ukupno na karaju $k+1$-ve , $k+2$-ge, $k+3$-će, ... godine redom po $d_{x+k}, d_{x+k+1}, d_{x+k+2}, \ldots$ dinara naslednicima , to vremenska osa za ovaj slučaj je



odakle diskontovanjem svih isplata osiguravajućeg društva na trenutak uplate mize od strane svih osiguranika (široka crtica na vremenskoj osi) sledi

$$\begin{aligned}
& l_x \cdot {}_{k|}A_x = \tfrac{d_{x+k}}{r^{k+1}} + \tfrac{d_{x+k+1}}{r^{k+2}} + \tfrac{d_{x+k+1}}{r^{k+3}} \ldots \Big/ \cdot \tfrac{1}{r^x} \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & \tfrac{l_x}{r^x} \cdot {}_{k|}A_x = \tfrac{d_{x+k}}{r^{x+k+1}} + \tfrac{d_{x+k+1}}{r^{x+k+2}} + \tfrac{d_{x+k+2}}{r^{x+k+3}} + \ldots \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & D_x \cdot {}_{k|}A_x = C_{x+k} + C_{x+k+1} + C_{x+k+2} + \ldots \\
\Leftrightarrow \quad & D_x \cdot {}_{k|}A_x = M_{x+k} \quad \Leftrightarrow \quad {}_{k|}A_x = \tfrac{M_{x+k}}{D_x}
\end{aligned}$$

Sada sledi

Činjenica 3.37 *Miza M za odloženo osiguranje kapitala K nakon k godina, u slučaju smrti osiguranika iznosi* $\boxed{M = K \cdot \frac{M_{x+k}}{D_x}}$

Primer 3.38 *Osoba od* 45 *godina, osigurala je* 10 000 € *da se isplati njenim nasledenicima kada god ona umrala na kraju te godine, ali samo ako bude živa bar* 10 *godina od trenutka osiguranja. Kolika neto miza (premija) je uplaćena za ovo osiguranje*?

Rešenje: $M = K \cdot \frac{M_{x+k}}{D_x} = 10\,000 \cdot \frac{M_{55}}{D_{45}} = 10\,000 \cdot \frac{3\,958.84}{12\,743.15} = 3\,106.64$€

A 3.39
Osiguranje kapitala za slučaj smrti (ODLOŽENO-PRIVREMNO, k-n godina)

Osigurani kapital K isplaćuje se naslednicima na kraju godine u kojoj je nastupila smrt osiguranika, samo ako je osiguranik umro nakon k godina od trenutaka osiguranja (uplate mize) i nije živeo više od n godina nakon tih k godina. Ako je osiguranik umro pre isteka od k godina, ili nakon tih $n + k$ godina, tada naslednici ne dobijaju ništa, odnosno kapital ostaje osiguravajućem društvu. Odredimo neto mizu M za ovu vrstu osiguranja kapitala K.

Neka je ${}_{k|n}A_x$ premija (miza) za ovakvo osiguranje kapitala od 1 dinar.

Kako je u trenutku 0 došlo l_x živih osiguranika starih x godina da se osigura i uplatilo svako po ${}_{k|n}A_x$ dinara, a osiguravajuće društvo isplaćuje ukupno na karaju $k + 1$-ve , $k + 2$-ge, $k + 3$-će, ... i $k + n$-te godine redom po $d_{x+k}, d_{x+k+1}, d_{x+k+2}, \ldots, d_{x+k+n}$ dinara naslednicima, to vremenska osa za ovaj slučaj je

$_{k|n}A_x \cdot l_x$

			...	d_{x+k}	d_{x+k+1}	d_{x+k+2}		$d_{x+k+n-1}$
0	1	2	...	k+1	k+2	k+3	...	k+n

odakle diskontovanjem svih isplata osiguravajućeg društva na trenutak uplate mize od strane svih osiguranika (široka crtica na vremenskoj osi) sledi

$$l_x \cdot {}_{k|n}A_x = \frac{d_{x+k}}{r^{k+1}} + \frac{d_{x+k+1}}{r^{k+2}} + \frac{d_{x+k+2}}{r^{k+3}} + \ldots + \frac{d_{x+k+n-1}}{r^{k+n}} \Big/ \cdot \frac{1}{r^x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{l_x}{r^x} \cdot {}_{k|n}A_x = \frac{d_{x+k}}{r^{x+k+1}} + \frac{d_{x+k+1}}{r^{x+k+2}} + \frac{d_{x+k+2}}{r^{x+k+3}} + \ldots + \frac{d_{x+k+n-1}}{r^{x+k+n}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad D_x \cdot {}_{k|n}A_x = C_{x+k} + C_{x+k+1} + C_{x+k+2} + \ldots + C_{x+k+n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad D_x \cdot {}_{k|n}A_x = M_{x+k} - M_{x+k+n} \quad \Leftrightarrow \quad {}_{k|n}A_x = \frac{M_{x+k} - M_{x+k+n}}{D_x}$$

Sada sledi

Činjenica 3.40 *Miza M za odloženo osiguranje kapitala K nakon k godina i privremeno za najviše n godina, u slučaju smrti osiguranika iznosi* $\boxed{M = K \cdot \frac{M_{x+k} - M_{x+k+n}}{D_x}}$

Primer 3.41 *Osoba od* 45 *godina, osigurala je* 10 000 € *da se isplati njenim nasledenicima na kraju te godine kada je umrla, ali samo ako je smrt nastupila između njene* 55 *i* 65 *godine života. Kolika jednokratna neto miza (premija) je uplaćena za ovo osiguranje?*

Rešenje: $M = K \cdot \frac{M_{55} - M_{65}}{D_{45}} = 10\,000 \cdot \frac{3958.84 - 2411.62}{12\,743.15} = 1\,214.16$€

A 3.42

Osiguranje stalnom godišnjom premijom

Kako nisu svi ljudi u mogućnosti da odjednm uplate veću sumu novca radi osiguranja, bilo kapitala bilo rente, to njima odgovara da se premija uplaćuje svake godine ili (1) do kraja života (doživotna) ili (2) na neki određeni broj godina (privremeno).

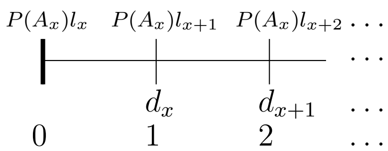
Kako isplate osiguravajućeg društva naslednicima mogu biti
(1) neposredne (od trenutka osiguranja) i doživotne (do kraja života)
(2) neposredne (od trenutka osiguranja) i privremene
(3) odložene i doživotne
(4) odložene i privremene.

Prema tome postoji $2 \cdot 4 = 8$ mogućnosti ovakvoga osiguranja.

A 3.43

Izračunavanje godišnje doživotne premije neposrednog doživotnog osiguranja kapitala

Neka je l_x ljudi odlučilo da se osigura tako što će svako od njih počevši od dana osiguranja svake godine uplaćivati po $P(A_x)$ dinara, da bi njihovi naslednici dobili po 1 dinar na kraju godine kada je osiguranik preminuo. Vremenska osa za ovo osiguranje je



Sada ćemo sve uplate osiguranika (iznosi iznad vremenske ose) diskontovati na trenutak 0, sabrati ih i staviti na levu stranu jednakosti i diskontovati sve isplate osiguravajućeg društva (iznosi ispod vremenske ose), sabrati ih i staviti na desnu stranu jednakosti. Tako dobijamo

$$
\begin{aligned}
& l_xP(A_x) + l_{x+1}\tfrac{P(A_x)}{r} + l_{x+2}\tfrac{P(A_x)}{r^2} + \ldots = \tfrac{d_x}{r} + \tfrac{d_{x+1}}{r^2} + \ldots \Big/ \cdot \tfrac{1}{r^x} \quad \Leftrightarrow \\
& \tfrac{l_x}{r^x}P(A_x) + P(A_x)\tfrac{l_{x+1}}{r^{x+1}} + P(A_x)\tfrac{l_{x+2}}{r^{x+2}} + \ldots = \tfrac{d_x}{r^{x+1}} + \tfrac{d_{x+1}}{r^{x+2}} + \ldots \Leftrightarrow \\
& P(A_x)(\tfrac{l_x}{r^x} + \tfrac{l_{x+1}}{r^{x+1}} + \tfrac{l_{x+2}}{r^{x+2}} + \ldots) = \tfrac{d_x}{r^{x+1}} + \tfrac{d_{x+1}}{r^{x+2}} + \ldots \Leftrightarrow \\
& P(A_x)(D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots) = C_x + C_{x+1} + \ldots \Leftrightarrow \\
& P(A_x)N_x = M_x \quad \Leftrightarrow \quad P(A_x) = \tfrac{M_x}{N_x}
\end{aligned}
$$

Činjenica 3.44 *Godišnja premija P koju osiguranik mora plaćati osiguravajućem društvu svake godine do kraja života, da bi njegovi naslednici dobili kapital od K dinara kada on premine, iznosi* $\boxed{P = K \cdot \frac{M_x}{N_x}}$

Primer 3.45 *Osoba od* 45 *godina, osigurala je* 10 000€ *da se isplati njenim nasledenicima na kraju godine kada umre. Koliku godišnju neto mizu (premiju) mora uplaćivti osiguranik do svoje smrti za ovo osiguranje?*

Rešenje: $P = K \cdot \frac{M_{45}}{N_{45}} = 10\,000 \cdot \frac{5\,461.36}{189\,326.69} = 288.46$€

A 3.46
Izračunavanje godišnje doživotne premije odloženog doživotnog osiguranja kapitala

Obračun je analogan kao i kod prethodne vrste osiguranja, samo što su isplate osiguranicima odložene za k godina. Označimo sa $P({}_{k|}A_x)$ godišnju premiju za jedan dinar osiguranoga kapitala, koji se može isplaćivati naslednicima na kraju godine ukojo je osiguranik preminuo, ali samo ako je prošlo najmanje k godina od trenutka osiguranja. Vremenska osa za ovo osiguranje je

$P({}_{k\|}A_x)l_x$	$P({}_{k\|}A_x)l_{x+1}$	$P({}_{k\|}A_x)l_{x+2}\dots$					
			$\dots$	d_{x+k}	d_{x+k+1}	d_{x+k+2}	$\dots$
0	1	2	$\dots$	k+1	k+2	k+3	$\dots$

$$l_x P({}_{k|}A_x) + l_{x+1}\frac{P({}_{k|}A_x)}{r} + l_{x+2}\frac{P({}_{k|}A_x)}{r^2} + \ldots = \frac{d_{x+k}}{r^{k+1}} + \frac{d_{x+k+1}}{r^{k+2}} \frac{d_{x+k+2}}{r^{k+3}} + \ldots \Big/ \cdot \frac{1}{r^x}$$
$$\frac{l_x}{r^x} P({}_{k|}A_x) + P({}_{k|}A_x)\frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} + P({}_{k|}A_x)\frac{l_{x+2}}{r^{x+2}} + \ldots = \frac{d_{x+k}}{r^{x+k+1}} + \frac{d_{x+k+1}}{r^{x+k+2}} + \frac{d_{x+k+2}}{r^{x+k+3}} \ldots \Leftrightarrow$$
$$P({}_{k|}A_x)(D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots) = C_{x+k} + C_{x+k+1} + C_{x+k+2} + \ldots \Leftrightarrow$$
$$P({}_{k|}A_x)N_x = M_{x+k} \quad \Leftrightarrow \quad P({}_{k|}A_x) = \frac{M_{x+k}}{N_x}$$

Činjenica 3.47 *Godišnja premija P, koju osiguranik mora plaćati osiguravajućem društvu svake godine do kraja života, da bi njegovi naslednici dobili kapital od K dinara kada on premine, ali samo ako je njegova smrt nastupila nakon k godina posle trenutka osiguranja, iznosi* $\boxed{P = K \cdot \frac{M_{x+k}}{N_x}}$

Primer 3.48 *Osoba od* 45 *godina, osigurala je* 10 000€ *da se isplati njenim nasledenicima na kraju te godine kada umre, ali samo ako je doživela bar* 55 *godina. Koliku godišnju neto premiju P mora uplaćivti osiguranik do svoje smrti za ovo osiguranje?*

Rešenje: $P = K \cdot \frac{M_{55}}{N_{45}} = 10\,000 \cdot \frac{3\,958.84}{189\,326.69} = 209.10€$

A 3.49

Izračunavanje godišnje privremene premije neposrednog doživotnog osiguranja kapitala

Neka je l_x ljudi odlučilo da se osigura tako što će svako od njih počevši od dana osiguranja svake godine uplaćivati po ${}_{|m}P(A_x)$ dinara, ali samo tačno m godina, da bi njihovi naslednici dobili po 1 dinar na kraju godine kada je osiguranik preminuo. Vremenska osa za ovo osiguranje je

${}_{\mid m}P(A_x)l_x$	${}_{\mid m}P(A_x)l_{x+1}$	${}_{\mid m}P(A_x)l_{x+2}$	$\dots$	${}_{\mid m}P(A_x)l_{x+m-1}$		$\dots$
	d_x	d_{x+1}	$\dots$	d_{x+m-2}	d_{x+m-1}	$\dots$
0	1	2	$\dots$	m-1	m-2	$\dots$

Sada ćemo sve uplate osiguranika (iznosi iznad vremenske ose) diskontovati na trenutak 0, sabrati ih i staviti na levu stranu jednakosti i diskontovati sve isplate osiguravajućeg društva (iznosi ispod vremenske ose), sabrati ih i staviti na desnu stranu jednakosti. Tako dobijamo

$${}_{|m}P(A_x)l_x + \frac{{}_{|m}P(A_x)}{r}l_{x+1} + \dots + \frac{{}_{|m}P(A_x)}{r^{m-1}}l_{x+m-1} = \frac{d_x}{r} + \frac{d_{x+1}}{r^2} + \dots \quad \Big/ \cdot \frac{1}{r^x} \quad \Leftrightarrow$$

$${}_{|m}P(A_x)\frac{l_x}{r^x} + {}_{|m}P(A_x)\frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} + \dots + {}_{|m}P(A_x)\frac{l_{x+m-1}}{r^{x+m-1}} = \frac{d_x}{r^{x+1}} + \frac{d_{x+1}}{r^{x+2}} + \dots \Leftrightarrow$$

$${}_{|m}P(A_x)\left(\frac{l_x}{r^x} + \frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} + \dots + \frac{l_{x+m-1}}{r^{x+m-1}}\right) = \frac{d_x}{r^{x+1}} + \frac{d_{x+1}}{r^{x+2}} + \dots \Leftrightarrow$$

$${}_{|m}P(A_x)(D_x + D_{x+1} + \dots + D_{x+m-1}) = C_x + C_{x+1} + \dots \Leftrightarrow$$

$${}_{|m}P(A_x)(N_x - N_{x+m}) = M_x \quad \Leftrightarrow \quad {}_{|m}P(A_x) = \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}}$$

Činjenica 3.50 *Godišnja premija P koju osiguranik mora plaćati osiguravajućem društvu svake godine, tačno n godina, da bi njegovi naslednici dobili kapital od K dinara kada on premine, iznosi*

$$\boxed{P = K \cdot \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}}}$$

Primer 3.51 *Osoba od 45 godina, osigurala je 10 000€ da se isplati njenim nasledenicima na kraju godine kada umre. Koliku godišnju neto premiju mora uplaćivti osiguranik tačno 10 godina za ovo osiguranje?*

Rešenje: $P = K \cdot \frac{M_{45}}{N_{45} - N_{55}} = 10\,000 \cdot \frac{5\,461.36}{189\,326.69 - 87\,924.183} = 538.58€$

Preostalih 5 mogućnosti se analogno rešavaju.

Jasno je da se mogu kostruisati razne druge vrste životnih osiguranja i obračun premija za svaku od njih je samo jedan novi zadatak iz finansijske odnosno aktuarske matematike, za onoga koje shvatio suštinu odnosno algoritam ovih obračuna.

x	l_x	D_x	N_x	S_x	d_x	C_x	M_x	R_x	a_x
10	100000	67556.42	1381771.36	24814820.55	676	439.12	14411.37	427355.16	20.4536
11	99324	64518.98	1314214.94	23433049.21	674	420.98	13972.25	412943.79	20.3694
12	98650	61616.50	1249695.96	22118834.29	672	403.59	13551.27	398971.54	20.2818
13	97978	58843.05	1188079.41	20869138.34	671	387.48	13147.68	385420.27	20.1906
14	97307	56192.37	1129236.42	19681058.89	671	372.58	12760.20	372272.59	20.0956
15	96636	53658.54	1073044.04	18551822.49	671	358.26	12387.62	359512.39	19.9977
16	95965	51236.50	1019385.50	17478778.50	672	344.98	12029.36	347124.77	19.8957
17	95293	48920.88	968149.00	16459392.05	673	332.21	11684.38	335095.41	19.7901
18	94620	46707.09	919228.12	15491244.10	675	320.39	11352.17	323411.03	19.6807
19	93945	44590.28	872521.03	14572016.03	677	308.97	11031.78	312058.86	19.5675
20	93268	42566.30	827930.75	13699495.05	680	298.41	10722.81	301027.08	19.4504
21	92588	40630.73	785364.45	12871564.35	683	288.19	10424.40	290304.27	19.3293
22	91905	38779.81	744733.72	12086199.95	686	278.33	10136.21	279879.87	19.2042
23	91219	37009.95	705953.91	11341466.28	690	269.19	9857.88	269743.66	19.0747
24	90529	35317.31	668943.96	10635512.42	694	260.33	9588.69	259885.78	18.9410
25	89835	33698.62	633626.65	9966568.51	698	251.76	9328.36	250297.09	18.8028
26	89137	32150.76	599928.03	9332941.91	703	243.81	9076.60	240968.73	18.6598
27	88434	30670.38	567777.27	8733013.93	708	236.10	8832.79	231892.13	18.5123
28	87726	29254.64	537106.89	8165236.70	714	228.95	8596.69	223059.34	18.3597
29	87012	27900.52	507852.25	7628129.85	720	221.99	8367.74	214462.65	18.2022
30	86292	26605.43	479951.73	7120277.64	727	215.52	8145.75	206094.91	18.0396
31	85565	25366.62	453346.30	6640325.95	734	209.24	7930.23	197949.16	17.8718
32	84831	24181.75	427979.68	6186979.69	742	203.37	7720.99	190018.93	17.6985
33	84089	23048.30	403797.93	5759000.09	750	197.67	7517.62	182297.94	17.5197
34	83339	21964.17	380749.62	5355202.19	758	192.09	7319.95	174780.32	17.3350
35	82581	20927.30	358785.45	4974452.53	767	186.89	7127.86	167460.37	17.1444
36	81814	19935.51	337858.15	4615667.18	776	181.82	6940.97	160332.51	16.9476
37	81038	18986.95	317922.64	4277809.03	785	176.84	6759.15	153391.54	16.7443
38	80253	18079.83	298935.69	3959886.42	795	172.22	6582.31	146632.39	16.5342
39	79458	17212.24	280855.86	3660950.75	805	167.67	6410.09	140049.08	16.3172
40	78653	16382.56	263643.62	3380094.91	815	163.23	6242.42	133639.99	16.0929
41	77838	15589.23	247261.06	3116451.31	826	159.06	6079.19	127397.57	15.8610
42	77012	14830.58	231671.83	2869190.27	839	155.36	5920.13	121318.38	15.6212
43	76173	14104.82	216841.25	2637518.46	857	152.59	5764.77	115398.25	15.3736
44	75316	13409.74	202736.43	2420677.23	881	150.82	5612.18	109633.48	15.1186
45	74435	12743.15	189326.69	2217940.82	909	149.64	5461.36	104021.30	14.8571
46	73526	12103.40	176583.54	2028614.14	944	149.41	5311.72	98559.94	14.5896
47	72582	11488.46	164480.14	1852030.61	981	149.31	5162.31	93248.22	14.3170
48	71601	10897.30	152991.68	1687550.48	1021	149.41	5013.00	88085.91	14.0394
49	70580	10328.76	142094.38	1534558.81	1063	149.58	4863.59	83072.91	13.7572
50	69517	9781.919	131765.619	1392464.43	1108	149.91	4714.01	78209.32	13.4703
51	68409	9255.778	121983.700	1260698.82	1156	150.39	4564.10	73495.31	13.1792
52	67253	8749.395	112727.922	1138715.12	1207	150.99	4413.71	68931.21	12.8841
53	66046	8261.892	103978.527	1025987.20	1261	151.68	4262.72	64517.50	12.5853
54	64785	7792.452	95716.636	922008.67	1316	152.20	4111.04	60254.78	12.2833

x	l_x	D_x	N_x	S_x	d_x	C_x	M_x	R_x	a_x
55	63469	7340.540	87924.183	826292.04	1375	152.91	3958.84	56143.74	11.9779
56	62094	6905.301	80583.643	738367.86	1436	153.55	3805.93	52184.90	11.6698
57	60658	6486.161	73678.342	657784.22	1497	153.92	3652.38	48378.97	11.3593
58	59161	6082.776	67192.181	584105.88	1561	154.32	3498.46	44726.59	11.0463
59	57600	5694.498	61109.405	516913.70	1627	154.67	3344.14	41228.13	10.7313
60	55973	5320.816	55414.907	455804.30	1698	155.20	3189.47	37883.99	10.4147
61	54275	4960.965	50094.091	400389.40	1770	155.56	3034.27	34694.52	10.0977
62	52505	4614.595	45133.126	350295.31	1844	155.84	2878.71	31660.25	9.7805
63	50661	4281.278	40518.531	305162.18	1917	155.77	2722.87	28781.54	9.4641
64	48744	3960.841	36237.253	264643.65	1990	155.48	2567.10	26058.67	9.1489
65	46754	3653.017	32276.412	228406.40	2061	154.84	2411.62	23491.57	8.8356
66	44693	3357.679	28623.395	196129.99	2128	153.72	2256.78	21079.95	8.5248
67	42565	3074.814	25265.716	167506.60	2191	152.19	2103.06	18823.17	8.2170
68	40374	2804.366	22190.902	142240.89	2246	150.01	1950.87	16720.11	7.9130
69	38128	2546.500	19386.536	120049.995	2291	147.12	1800.86	14769.24	7.6130
70	35837	2301.431	16840.036	100663.462	2327	143.69	1653.74	12968.38	7.3172
71	33510	2069.223	14538.605	83823.428	2351	139.59	1510.05	11314.64	7.0261
72	31159	1850.048	12469.382	69284.824	2362	134.85	1370.46	9804.59	6.7400
73	28797	1644.044	10619.334	56815.443	2358	129.44	1235.61	8434.13	6.4594
74	26439	1451.369	8975.290	46196.110	2339	123.465	1106.17	7198.519	6.1841
75	24100	1272.086	7523.921	37220.821	2303	116.886	982.705	6092.349	5.9147
76	21797	1106.275	6251.835	29696.901	2249	109.754	865.819	5109.644	5.6512
77	19548	953.9711	5145.5598	23445.0666	2179	102.249	756.065	4243.825	5.3938
78	17369	815.0314	4191.5887	18299.5070	2092	94.390	653.816	3487.760	5.1428
79	15277	689.2936	3376.5573	14107.9184	1987	86.205	559.426	2833.944	4.8987
80	13290	576.5777	2687.2637	10731.3612	1866	77.841	473.221	2274.518	4.6607
81	11424	476.5601	2110.6860	8044.0976	1730	69.393	395.380	1801.297	4.4290
82	9694	388.8384	1634.1259	5933.4118	1582	61.015	325.987	1405.917	4.2026
83	8112	312.8677	1245.2875	4299.2861	1427	52.920	264.972	1079.930	3.9803
84	6685	247.9139	932.4198	3053.9988	1268	45.216	212.052	814.958	3.7611
85	5417	193.1635	684.5059	2121.5792	1111	38.093	166.836	602.906	3.5437
86	4306	147.6410	491.3424	1437.0735	958	31.5837	128.743	436.0701	3.3280
87	3348	110.3786	343.7014	945.7312	811	25.7091	97.1593	307.3271	3.1139
88	2537	80.4242	233.3228	602.0298	673	20.5139	71.4502	210.1678	2.9011
89	1864	56.8171	152.8987	368.7070	545	15.9733	50.9369	138.7176	2.6911
90	1319	38.6584	96.0816	215.8083	427	12.0336	34.9630	87.7813	2.4854
91	892	25.1380	57.4232	119.7267	322	8.7254	22.9294	52.8183	2.2843
92	570	15.4457	32.2852	62.3036	231	6.0189	14.2040	29.8889	2.0903
93	339	8.8328	16.8395	30.0184	155	3.8833	8.1851	15.6849	1.9065
94	184	4.6098	8.0066	13.1789	95	2.2885	4.3019	7.4998	1.7369
95	89	2.1440	3.3968	5.1723	52	1.2045	2.0133	3.1979	1.5844
96	37	0.8570	1.2528	1.7755	24	0.5345	0.8089	1.1846	1.4618
97	13	0.2895	0.3958	0.5226	9	0.1927	0.2743	0.3757	1.3670
98	4	0.0857	0.1063	0.1268	3	0.0618	0.0816	0.1014	1.2403
99	1	0.0206	0.206	0.0206	1	0.0198	0.0198	0.0198	1.0000